EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

16e JAARGANG 1940, Nr. 3.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Blz.

De redactie vestigt de aandacht op blz. 38 van afl. I; zij hoopt enige oplossingen van het vraagstuk te krijgen en tevens dat velen hun bevindingen meedelen over de tafel in vier decimalen.

DEN HAAG / ROTTERDAM December 1939.

Aan de Wiskundeleeraren van
Gymnasia, Lycea en Hoogere Burgerscholen!

Hierbij deelen de Besturen van Liwenagel en de Vereeniging van Wiskundeleeraren mede, dat Euclides met ingang van 1 September a.s. het Officieel Orgaan hunner Vereeniging is geworden. In verband hiermee doen zij opnieuw een beroep op allen, die nog geen lid van een van deze beide Vereenigingen zijn, zich aan te sluiten. Ook de leeraren van de A-scholen worden hiertoe dringend uitgenoodigd. Laat toch iedere Wiskundeleeraar begrijpen, dat het in zijn eigen belang is, niet afzijdig te staan, maar kennis te nemen van hetgeen er op het gebied der didactiek der Wiskunde met betrekking tot het Gymnasiaal en Middelbaar onderwijs gebeurt. Wegens de kosten behoeft niemand dit achterwege te laten. Zij, die lid zijn van het Genootschap van Gymnasialeeraren zijn automatisch lid van Liwenagel. Door storting van *f* 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong, Leiden, kunnen zij zich verder op Euclides abonneeren. Zij, die lid wenschen te worden van de Vereeniging van Wiskundeleeraren, betalen *f* 1,— contributie en kunnen door storting van *f* 1,75 op de

GRONINGEN, Jan. 1940.

L.S.

Van een abonné op het wiskundige tijdschrift ,,Christiaan Huygens" kreeg de redactie een brief, waarvan hier een gedeelte volgt.

Het is een algemene klacht, dat het over het geheel genomen zo moeilijk is voor de ouderen om op de hoogte te komen van de nieuwere resultaten van de Wiskunde. Door de overbelasting van de docenten is voor hen het bestuderen van originele artikelen vrijwel onmogelijk; de animo om een boek te bestuderen is gewoonlijk in slechts geringe mate aanwezig. **In deze gevallen is een inleidende en oriënterende beschouwing, die tot studie prikkelt, een uitkomst.**

Het komt mij voor, dat hieraan niet zonder meer mag worden voorbijgegaan. Als ik zo over deze dingen mijn gedachten laat gaan, kan ik mij niet aan de indruk onttrekken, dat bij velen — misschien wel bij zeer velen — nog slechts een herinnering leeft aan een langzaam in het verleden wegzinkende academische studie, welke tot de persoonlijke ontwikkeling niets meer kan bijdragen. De taak van een tijdschrift moet onder meer zijn, dat het animeert; er moet spanning en dynamiek in zitten.

In deze richting is dunkt mij met ,Chr. Huygens" wel iets te bereiken. Laat ik, om concreet te zijn, de volgende voorstellen formuleren.

I. Vraagstukken.

Ook mechanica-opgaven lijken mij zeer gewenst; natuurlijk die opgaven vermijden, die alleen door vakspecialisten zijn op te lossen.

II. Een studierubriek.

Hierin zouden dan door deskundigen, in wie de redactie

Ik geef U deze opmerkingen ter overdenking. Laat ik er aan toevoegen, dat het stellig niet in mijn bedoeling ligt om de redactie in gebreke te stellen. Integendeel, ik ben er mij ten volle van bewust, dat het redigeren van een tijdschrift niet een ieders werk is en aan hen, die thans de leiding hebben, ten volle is toevertrouwd.

Aan de algemene opzet van het tijdschrift zou ik dan ook niets gewijzigd willen zien. Maar ik zou wensen, dat aan het tijdschrift een overheersende plaats werd gegeven **om zijn taak van voorlichting nog beter te kunnen vervullen** dan op het ogenblik het geval is. Want dat is wel degelijk nodig. Als we zien wat heden ten dage op de markt verschijnt op het gebied van schoolboeken en welk een ontstellend groot percentage prullectuur dienst doet bij het onderwijs, dan lijkt mij de twijfel aan de voldoende algemene ontwikkeling op het gebied van mathesis bij vele docenten niet geheel zonder grond. Alleen een goed onderlegd en voldoend belangstellend docentencorps kan aan de wiskunde op de scholen die plaats verzekeren, die aan het vak toekomt. In deze richting kan uiteraard door de universiteiten niets worden gedaan. **Het tijdschrift behoort deze zaak over te nemen.**

Tot zo ver de zeer competente schrijver van de brief.

Het tijdschrift *Christiaan Huygens* ging met October 1939 zijn 18e jaar in. Gedurende al die jaren hebben tallozen, de een in meerdere, de ander in mindere mate, iets aan het tijdschrift gehad . . . maar het kan inderdaad beter en de gedachten door den abonné naar voren gebracht, zijn ons als uit het hart gegrepen. Het gevoel van: voldoen we aan onze roeping, geheel, half, maar voor een kwart, heeft ons dikwijls bezig gehouden.

Een stem van iemand, die de wiskunde een warm hart toedraagt en die de wiskunde van thans van de universiteit in brede kringen wil verbreiden, heeft U gehoord. Gaarne zal de redactie aan zijn roepstem gehoor geven. Daartoe hebben ondergetekenden zich om hulp gewend tot enige professoren en enige jongere geleerden. Toezegging van steun bij ons „sympathiek" streven (zoals een van hen schrijft) hebben de volgende professoren reeds gedaan: Van der Corput, Schaake, Van Dantzig, Wolff, Barrau, Blumenthal en Rosenthal, terwijl van nu af aan zich reeds bereid hebben verklaard als actieve medewerkers op te treden Dr. E. W. Beth, Dr. J. Haantjes, Dr. J. C. H. Gerretsen, Dr. J. Popken en Dr. P. J. G. Vredenduin, zodat deze namen van stonde af aan op het titelblad zullen voorkomen.

Wij hopen en vertrouwen, dat Chr. Huygens in de door ons bedoelde zin, die ten volle door de medewerkers wordt gedeeld, in ruime mate zal bijdragen tot voorlichting van de leraren en dat het tijdschrift zijn

zij het dan met een klein verschil, wordt gesproken in: Vlaanderen en Zuid-Afrika, waar „Christiaan Huygens" zich samen in een veertigtal intekenaars mag verheugen. Wat in Leiden, in Groningen, in Amsterdam, in Utrecht thans van de nieuwere wiskunde gedoceerd wordt, komt zodoende tevens onder de ogen van onze stamverwante docenten in België en in het verre Zuid-Afrika; zodat Chr. Huygens mede een band vormt tussen allen, die de wiskunde in het Nederlands onderwijzen.

We merken nog op, dat artikelen, die in Noordhoff's Tijdschriften verschijnen (Compositio Mathematica Christiaan Huygens, Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Euclides) door hun groot aantal intekenaars en hun ruime verspreiding, onder de ogen komen van allen, die men met zijn publicaties wenst te bereiken. Elke schrijver stelt daarop zeker in de eerste plaats hoge prijs.

Amsterdam-Zuid
Jacob Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

Mede namens
Prof. Dr. F. SCHUH en
K. HARLAAR.

een soort volksuniversiteit voor leraren, indien U wilt. Laat ik maar eens enkele onderwerpen noemen:

1. Groepentheorie in verband met elementaire rekenkunde en meetkunde.
2. Niet-Euclidische meetkunde, elementair en analytisch.
3. Meerdimensionale meetkunde met voorkeur voor die onderwerpen, die een uitbreiding zijn van de schoolstereometrie.
4. Afbeeldingsmeetkunde, b.v. afbeeldingen van cirkels op de punten van een driedimensionale ruimte, vooral in verband met problemen uit de elementaire meetkunde (Raakprobleem, gelijkvormigheidspunten, gelijkvormigheidscirkels, niet-Euclidische maatbepaling in de cirkelruimte).
5. Beginselen van de axiomatiek en de constructie van schijnmeetkunden.
6. Beginselen van de theorie van abstracte lichamen. Hypercomplexe getallen, quaternionen, rotatieproblemen, getallen van Study.
7. Grondslagen van de schoolalgebra bezien in het licht van de moderne algebra.
8. Eenvoudige mathematisch-physische questies, affiene transformaties en relativiteitstheorie, interpretatie van eigenschappen van kegelsneden, eigenschappen in de speciale relativiteitstheorie naar Minkowski.
9. Overzicht van de nieuwere vondsten op het gebied van de leer van de transcendente getallen.
   Enz. Enz.

Natuurlijk zijn dit alle onderwerpen, die op de universiteit worden onderwezen en in tal van bekende leerboeken verbreid. Het spreekt dan ook vanzelf, dat de behandeling van dergelijke onderwerpen een enigzins eigen cachet moet bezitten. Het moet niet uit het oog worden verloren, dat het universitaire onderwijs zeer onvolledig is en veel leemten bevat. Een overgroot gedeelte van de afgestudeerden heeft wel eens „aan verschillende onderwerpen iets gedaan", maar van een behoorlijk op de hoogte zijn, is lang niet altijd sprake.

Bovendien schaadt het niemand om dingen, die men vroeger wel eens heeft gelezen, nog eens weer onder de ogen te krijgen.

kosten begrepen zijn.

Tevens wijzen de Besturen der beide Wiskundevereenigingen er nog eens op, dat de leden, mits zich via de Vereenigingen abonneerend, nu reeds van de volgende voordeelige abonnementsvoorwaarden gebruik kunnen maken:

voor Euclides en Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde samen *f* 6,75 (anders *f* 11,—)

voor Euclides en Chr. Huygens samen *f* 10,75 (anders *f* 14,—)

voor alle drie samen *f* 14,75 (anders *f* 18,—).

Namens bovengenoemde Besturen

Mej. Dr. A. T. M. KRAMER,
Secretaresse van Liwenagel,
Anna van Saxenstraat 9 - DEN HAAG.

Ir. J. J. TEKELENBURG,
Secretaris van de Vereeniging voor Wiskundeleeraren,
van Vollenhovenstraat 17b - ROTTERDAM (C.).

reeds bewezen proposities in het oog vat, waarvan in haar verloop gebruik wordt gemaakt. Het is de eigenlijke zwakke plek in de opvatting van Mach, dat hij deze beschouwingswijze heeft verzuimd.

Men vindt ditzelfde gebrek in eenigszins anderen vorm terug bij den auteur van de jongste Duitsche Archimedes-vertaling, A. Czwalina [8]). Deze merkt op, dat, wanneer de hefboomswet eens de omgekeerde evenredigheid van de kracht en het vierkant van den arm als voorwaarde voor evenwicht uitsprak, de proposities 1—5 onveranderd zouden blijven bestaan, maar Prop. 6 onjuist zou zijn, waaruit hij concludeert, dat Prop. 6 dus geen gevolg van de Prop. 1—5 kan zijn en dat dus de afleiding van Prop. 6 niet in orde is.

Volgens deze redeneering zou het bewijs van Euclides I, 29 (gelijkheid van verwisselende binnenhoeken als noodige voorwaarde voor parallelisme) en het daarop gebaseerde van I,32 (som der hoeken van een driehoek = 180°) ook niet juist kunnen zijn; immers, als de som van de hoeken van een driehoek eens kleiner dan 180° was, zouden de proposities 1—27 onveranderd blijven bestaan, maar 29 en 32 niet. De analogie tusschen beide gevallen is volkomen. De proposities 29 en 32 vloeien inderdaad niet voort uit 1—27, maar uit deze, aangevuld met het vijfde postulaat; evenzoo is de zesde propositie van het werk over de evenwichten van vlakke figuren geen gevolg van de proposities 1—5, maar van deze in verband met het inmiddels ingevoerde axioma VI. Zoodra men dit axioma in de boven gegeven interpretatie aanvaardt, kan men op het bewijs van Prop. 6 niets meer aanmerken.

Een eenigszins ander standpunt ten opzichte van de behandelde kwestie wordt ingenomen door O. Hölder [9]). Deze vindt met Mach het bewijs van Prop. 6 ontoereikend, omdat ook hij van meening is, dat Archimedes verzuimt, de toelaatbaarheid van vereeniging of splitsing van gewichten met behoud van de plaats van het zwaartepunt te postuleeren of te bewijzen. Volgens hem is het be-

---

[8]) A. Czwalina, *Ueber das Gleichgewicht ebener Flächen* (zie Deel I; pag. 41, noot 1).

[9]) O. Hölder. *Die Mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik* (Berlin, 1924) § 12. *Der Hebelbeweis de Archimedes.* pag. 39 seq.

wijs echter in orde te brengen (en krijgt het ook waarde), wanneer men er slechts in slaagt, de leemte, die Archimedes hier open zou hebben gelaten, aan te vullen. De wijze, waarop hij dit tracht te doen (door superpositie van evenwichtsstanden, waarbij o.a. het begrip van de door een steunpunt uitgeoefende reactiekracht optreedt) past echter, naar het ons voorkomt, wel zeer weinig in het kader der Grieksche mechanica en wordt bovendien door geen enkele bewijsplaats gesteund.

We zijn thans zoover gevorderd, dat we van de boven gestelde vraag de eerste twee leden met eenige zekerheid kunnen beantwoorden: Archimedes is zich ten volle bewust geweest, dat het bewijs van de zesde propositie steunt op de praemisse, dat de invloed van een aan een hefboom opgehangen gewicht op het evenwicht uitsluitend afhangt van de zwaarte van dat lichaam en de plaats van zijn zwaartecentrum; en hij heeft die praemisse uitdrukkelijk geformuleerd in het zesde axioma, waarin hij, schijnbaar tautologisch, postuleert, dat een hefboomevenwicht niet verstoord wordt, wanneer men de daaraan hangende gewichten door andere vervangt, die aan de oorspronkelijke gelijk zijn en die op dezelfde plaatsen hangen.

Thans blijft nog de vraag over, of hij deze bewering al dan niet nader motiveert, welke vraag samenhangt met deze andere, wat hij onder het zwaartecentrum van een lichaam verstaat en hoe hij dit begrip ingevoerd denkt. Het trekt nl. de aandacht, dat hij over het zwaartecentrum voortdurend als over een geheel bekende zaak spreekt: het wordt van axioma IV af zonder expliciete definitie gebruikt en in de bewijzen der proposities 4 en 6 wordt het in het geval van een belasten hefboom zonder motiveering geidentificeerd met het punt, waarin die hefboom ondersteund moet worden, om in (indifferent [10])) evenwicht te verkeeren.

---

[10]) Men kan met W. Stein (l.c.p. 228) de vraag stellen, of Archimedes bij zijn evenwichtsbeschouwingen eigenlijk uitsluitend aan indifferent evenwicht denkt of dat hij ook de mogelijkheid van stabiel evenwicht toe laat. De vraag komt hierop neer, of ondersteuning in het zwaartecentrum slechts als voldoende, of dat zij tevens als noodige voorwaarde voor evenwicht wordt beschouwd. Voor de beantwoording van deze vraag lijkt ons de overweging van Stein, dat in het laatste geval de Prop. 4 slechts een triviale consequentie van Axioma I zou zijn, waaruit hij dan afleidt, dat de ondersteuning in het zwaartecentrum door Archimedes niet als noodige voorwaarde voor evenwicht

Men kan ten aanzien van de hiermee opgeworpen vragen tweeërlei standpunt innemen:

a) het is mogelijk, dat Archimedes bij het schrijven van het werk over de evenwichten de theorie van het zwaartepunt tot op zekere hoogte bekend kon onderstellen, omdat die theorie reeds, hetzij door vroegere beoefenaars der mechanica, hetzij door hemzelf in een thans verloren werk [11]), ontwikkeld was.

b) het is mogelijk, dat het werk over de evenwichten een geheel autonoom geschrift is en dat de definitie van het begrip zwaartecentrum impliciet gegeven moet worden gedacht in de axiomata, waarop dit werk wordt opgebouwd.

Beide standpunten hebben reeds hun verdedigers gevonden: het eerste in G. Vailati [12]), het tweede in Toeplitz en Stein [13]). We beschouwen eerst de laatstgenoemde opvatting. Volgens deze moet men alle in de axiomata van het werk voorkomende termen, die op de statica betrekking hebben (zooals *βάρος*, gewicht; *ἰσορροπεῖν*, in evenwicht zijn; *κέντρον τοῦ βάρεος*, centrum der zwaarte) opvatten als evenveel onbekenden, voor welker bepaling de axiomata als vergelijkingen fungeeren, terwijl men andere zoodanige vergelijkingen kan vinden door de aannamen, die in de bewijzen der proposities stilzwijgend worden gemaakt, uitdrukkelijk te formuleeren. In het aldus gecompleteerde axioma-systeem zijn dan impliciet de definities van al de bedoelde termen vervat en men behoeft dan in het bijzonder niet meer naar een expliciete omschrijving van de beteekenis van het woord „centrum der zwaarte” te vragen.

Het hiermee omschreven onderzoek is door W. Stein op zorgvuldige wijze verricht en heeft ongetwijfeld het inzicht in de statica van Archimedes aanzienlijk verhelderd. Of men echter langs dezen

---

gesteld wordt, weinig overtuigend: er bestaan in de Grieksche wiskunde talrijke voorbeelden van triviale consequenties, die niettemin het onderwerp van een afzonderlijke propositie vormen. Van meer belang lijkt het, dat Archimedes in **Q P.** voortdurend werkelijk stabiele evenwichten beschouwt, zoodat het toch niet zijn bedoeling blijkt te zijn, zwaartecentrum en steunpunt te identificeeren.

[11]) Dit zou dan een der door Pappos en Simplikios geciteerde werken hebben kunnen zijn, die we in Hoofdstuk II bij de opsomming van de verloren geschriften sub 3) hebben vermeld.

[12]) G. Vailati. *Del concetto di centro di gravità nella Statica d'Archimede.* Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino. 32 (1896—97), 742—758.

[13]) Zie noot 7.

weg ook tot een werkelijke verplaatsing in zijn gedachtengang komt, lijkt twijfelachtig. Niet, dat het begrip der impliciete definitie door een axiomasysteem den Grieken geheel vreemd zou zijn geweest: wanneer Euclides in de *Elementen* het begrip „rechte lijn" gebruikt, beroept hij zich nooit op de eigenschap der breedtelooze lengte, die in de definities als kenmerk voor dit begrip wordt opgegeven, maar uitsluitend op de eigenschappen van het bepaald zijn door twee punten en de onbegrensde verlengbaarheid van ieder lijnstuk, die in de postulaten als kenmerk worden vermeld. In zooverre kan men zeggen, dat hij zooal niet ex confesso, dan toch de facto een impliciete definitie van het begrip rechte lijn gebruikt. Maar dit blijft in de *Elementen* ook vrijwel het eenige voorbeeld van deze methode van definieeren: bij andere termini, waar ze toegepast zou kunnen zijn, zooals oppervlakte van een figuur of inhoud van een lichaam, komt ze niet voor; de beteekenis van deze termini wordt blijkbaar als intuitief bekend ondersteld en de axiomata, die er over worden opgesteld (congruente figuren hebben gelijke oppervlakten, het geheel is grooter dan het deel) beduiden weliswaar een stap in de richting der impliciete definitie (die door een volledig axiomasysteem zou worden gegeven), maar getuigen nog niet van het bewuste streven, de vermelde begrippen geheel langs dezen weg te bepalen. Daaraan kan het feit, dat wij achteraf door formuleering van z.g. verzwegen aannamen (die dus voor den schrijver nog geen aannamen, nog geen bewuste onderstellingen zijn) het ten grondslag gelegde axioma-systeem zoo kunnen completeeren, dat het voor impliciete definitie toereikend wordt, niets veranderen.

Is het nu aannemelijk, dat, waar in de elementaire meetkunde der Grieken de bewuste impliciete definitie door een axiomasysteem nog zoo weinig gebruikelijk was, in de Grieksche mechanica een zoover doorgevoerde toepassing van deze definitie-methode zou voorkomen, dat daarin niet, zooals in de meetkundige voorbeelden een enkele, maar zeven termen tegelijk zouden worden bepaald? Moet men werkelijk gelooven, dat Archimedes zich gedwongen heeft, om bij de woorden „in evenwicht zijn", „doorslaan", „gewicht", aan niets anders te denken dan aan de relaties, die daartusschen in de axiomata worden gevestigd? Is het niet veel meer waarschijnlijk, dat hij voortdurend een geidealiseerden hefboom

voor oogen heeft gehad, die hij in gedachten heeft zien doorslaan of in evenwicht zien blijven onder invloed van daaraan opgehangen gewichten (in den vorm van planimetrische figuren), dat de axiomata niets anders bevatten dan de formuleering van de uitkomsten van de eenvoudigste waarnemingen, die hij heeft kunnen doen en dat de helderheid van de daardoor verkregen voorstellingen het ontstaan van de vraag naar de abstracte definitie van de gebruikte woorden volkomen heeft belet?

Als dat zoo is, moet echter ook de term „centrum der zwaarte", die even weinig nadrukkelijk wordt ingevoerd als de andere vermelde termen, een voor ieder duidelijke aanschouwelijke beteekenis hebben aangeduid. De onbevangen lectuur van de axiomata en proposities wekt toch wel den indruk, dat de schrijver aan een in zijn zwaartepunt ondersteunden hefboom denkt (geidealiseerd tot een rechte lijn), waaraan dunne plaatjes (geidealiseerd tot planimetrische figuren) in hun zwaartepunt worden bevestigd (getuige het veelvuldig gebruik van een zelfde letter voor de opgehangen figuur, het zwaartecentrum dier figuur en het punt van den hefboom, dat de plaats dier figuur aanduidt). Daar nu echter de term „centrum der zwaarte" onmogelijk een intuitief zoo duidelijke beteekenis kan hebben gehad als „in evenwicht zijn" of „doorslaan", is er alle reden om met Vailati aan te nemen, dat deze term bij de lezers van het werk bekend kon worden ondersteld op grond van de te verwachten voorkennis; hierdoor komen we tot de eerste der boven onderscheiden mogelijkheden en we hebben dus na te gaan, welke gegevens over een elementaire statica, waarin de term „centrum der zwaarte" ingevoerd zou kunnen zijn, ons in de geschiedenis der Grieksche natuurwetenschappen ten dienste staan.

Hiervoor komen voornamelijk een groep uitlatingen in de *Mechanica* van Heroon [14]) in aanmerking en een samenhangende uiteenzetting die Pappos in de *Collectio* [15]) aan dit onderwerp wijdt. Dit zijn beiden auteurs, die lang na Archimedes komen en er kan dus op den eersten blik iets onlogisch in liggen, hen in dit verband te

---

[14]) Van dit werk is een volledige tekst slechts in het Arabisch bewaard gebleven, terwijl in het Grieksch fragmenten aanwezig zijn. Men vindt beide met een Duitsche vertaling: Heronis *Opera* II, 1. De bedoelde plaatsen zijn: Boek I, Cap. 24. Boek II, Cap. 35 seq. (II, 35 ook in het Grieksch).

[15]) Pappos, *Collectio* VIII, 5; 1030 seq.

citeeren. Echter schrijft de eerste van hen zoo elementair en de tweede zoo encyclopaedisch, dat het niet te gewaagd lijkt, hen niettemin te raadplegen over wat in het werk van hun grooten voorganger, wiens peil zij geen van beiden bereiken, beneden den drempel der uiteenzetting kan zijn gebleven; en bovendien is de Grieksche mechanica zoozeer in de eerste beginselen blijven steken, dat men bij een schrijver uit de derde eeuw na Christus in het geheel geen verdergaande ontwikkeling van het vak mag verwachten dan in de derde eeuw voor Christus reeds bereikt kan zijn geweest.

Blijkbaar hebben Heroon en Pappos bij de behandeling van het onderwerp „centrum der zwaarte" uit dezelfde bron geput; daar Heroon er echter vluchtig en onduidelijk over schrijft, zullen we voornamelijk Pappos aan het woord laten en slechts hier en daar de uitlatingen van Heroon ter bevestiging aanhalen.

In het achtste boek der *Collectio*, waarin Pappos over de mechanica spreekt, wordt de theorie van het centrum der zwaarte (*κέντρον τοῦ βάρους*) het uitgangspunt en element der barycentrische leer (*ἀρχή καὶ στοιχεῖον τῆς κεντροβαρικῆς πραγματείας*) genoemd, omdat door haar uiteenzetting vanzelf de andere deelen der theorie duidelijk worden. Hierna volgt een expliciete definitie: *Wij zeggen, dat het centrum der zwaarte van ieder lichaam een binnen dat lichaam gelegen punt is, zoodat indien het lichaam in gedachte aan dat punt wordt opgehangen, het gewicht, daardoor gedragen, in rust blijft en zijn oorspronkelijken stand behoudt* [16]).

Ongeveer zo drukt zich ook Heroon uit, wanneer hij een punt definieert, dat in de Duitsche vertaling van den beschikbaren Arabischen tekst door *Aufhängepunkt* wordt weergegeven, welk punt volgens hem door Archimedes en zijn aanhangers van het centrum der zwaarte onderscheiden zou zijn [17]). Voor het zwaartecentrum citeert hij dan echter een definitie van den Stoicijn Poseidonios, die wat slordiger weer ongeveer hetzelfde zegt [18]), zoodat het niet

---

[16]) ibidem l. 11: *λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντός, ἀφ' οὗ κάτ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ (βάρος) ἠρεμεῖ φερόμενον καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν.* Hierbij is *βάρος* als synoniem met *σῶμα* te beschouwen.

[17]) *Heronis Opera* II, 1. pag. 64.

[18]) ibidem, pag. 63: *der Schwerpunkt ist ein solcher Punkt, dasz wenn die Last in demselben aufgehängt wird, sie in zwei gleiche Teile geteilt wird;* waarbij met „gleich" blijkbaar bedoeld had moeten worden „elkaar in evenwicht houdend", maar, zooals blijken zal, blijkbaar vaak bedoeld wordt „van gelijk gewicht".

recht duidelijk wordt, welk onderscheid hij eigenlijk bedoelt. Het is echter van belang, dat hij telkens een term gebruikt, die in Duitsche vertaling door *Schwer- oder Neigungspunkt* wordt weergegeven en die in het Grieksch vermoedelijk *κέντρον τοῦ βάρους ἢ τῆς φορᾶς* zal hebben geluid. Hierin beduidt *φορά* niets anders dan de natuurlijke valbeweging; de opvatting is dus blijkbaar deze, dat, waar de zwaarte van deze beweging de oorzaak is, het streven naar omlaag in het centrum der zwaarte geconcentreerd kan worden gedacht, zoodat dit punt ook als valcentrum kan worden betiteld (een begrip analoog aan het latere centrum oscillationis of centrum percussionis).

Van dit zwaarte- of valcentrum zegt Heroon nu nog verder [19]), dat het een punt is, waardoor alle verticalen van de ophangpunten gaan; hierbij beduidt ophangpunt, in tegenstelling tot het boven gebruikte *Aufhängepunkt,* ieder punt, waaraan het lichaam wordt opgehangen en de bedoelde verticalen zijn de lijnen van het lichaam, die in den evenwichtsstand telkens met de verticalen der ophangpunten samenvallen. Hij merkt nog op, dat het zwaarte- of valcentrum heel goed buiten de substantie van het lichaam gelegen kan zijn, b.v. bij ringen of raderen.

Ter bepaling van het zwaartecentrum denkt Pappos zich nu een verticaal vlak $\alpha\beta\gamma\delta$, op welks horizontalen bovenrand $\alpha\beta$ het lichaam zoo geplaatst wordt, dat het in evenwicht blijft. Het vlak $\alpha\beta\gamma\delta$ zal nu, uitgebreid, het lichaam in twee deelen verdeelen, die elkaar om dit vlak als ondersteuningsvlak in evenwicht houden [20]), in evenstaltwichtige deelen dus (om met Stevin te spreken). Het lichaam wordt nu in een anderen stand opnieuw op $\alpha\beta$ geplaatst, zoodat er weer evenwicht is. Opnieuw wordt het door het vlak in twee evenstaltwichtige deelen verdeeld. De beide doorsneden, die het vlak $\alpha\beta\gamma\delta$ in de twee achtereenvolgens door het lichaam ingenomen standen daarin heeft bepaald, zullen elkaar moeten snijden. Immers waren deze beide doorsneden

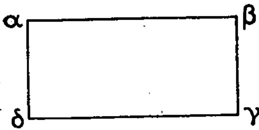


Fig. 118.

[19]) ibidem, pag. 36.

[20]) Pappos, *Collectio* VIII, 5; 1030, l. 26. *τεμεῖ τὸ ἐπικείμενον σῶμα εἰς ἰσόρροπα δύο μέρη, οἷον περὶ ἄρτημα τὸ ἐπίπεδον ἰσορροποῦντα.*

parallel, dan zouden dezelfde deelen tegelijkertijd wel en niet evenstaltwichtig zijn, wat ongerijmd is [21]).

Het lichaam zal nu ook in evenwicht zijn, wanneer het op de rechte, die die twee doorsneden gemeen hebben, als op een stut (ὑπόθεμα) rust [22]). Zoekt men nu een andere rechte op, die ook als stut kan dienen, dan zal deze, verlengd, de eerst beschouwde moeten snijden. Immers anders kon men door de twee rechten twee parallele vlakken brengen, die beide het lichaam zouden verdeelen in deelen, die, op de eene wijze beschouwd wel, op de andere niet evenstaltwichtig zouden zijn [23]).

Hieruit volgt, dat alle op de beschreven wijze verkregen steunrechten door een punt gaan en wel is dit het boven gedefinieerde centrum der zwaarte [24]). Immers ieder vlak door dit punt verdeelt het lichaam in twee deelen, die elkaar, bij ondersteuning in dat vlak, in evenwicht houden [25]).

Dit is, volgens Pappos, het meest wezenlijke (*τὸ μάλιστα σύνεχον*) van de barycentrische leer. Voor de elementen van wat met behulp hiervan kon worden bewezen, verwijst hij naar het werk van Archimedes over de evenwichten en naar de mechanica van Heroon [26]). Zelf behandelt hij als toepassing nog een planimetrische stelling, die ons hier als zoodanig niet verder interesseert [27]), maar

---

21 Pappos *Collectio* VIII, 5; 1032, l. 2. *εἰ γὰρ μὴ τεμεῖ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἰσόρροπα καὶ ἀνισόρροπα γενήσεται ἀλλήλοις, ὅπερ ἄτοπον.*

22) Bedoeld wordt blijkbaar, dat het lichaam ondersteund wordt in het laagste snijpunt van zijn oppervlak met die rechte. Het lichaam kan dus in evenwicht worden gehouden zoowel door ondersteuning langs een horizontale rechte (eventueel in twee punten daarvan) als door ondersteuning in een punt. Dit bedoelt Heroon (II, 1; pag. 64) waarschijnlijk, wanneer hij uit Archimedes citeert: *Lasten neigen sich nicht auf einer Linie und auf einem Punkte.* Hierin is *sich neigen* = vallen. Er staat dus: het lichaam kan belet worden te vallen door ondersteuning langs een rechte of in een punt.

23) Aan deze conclusie ligt de aanname ten grondslag, dat ieder vlak door een als boven verkregen steunrechte het lichaam in twee evenstaltwichtige deelen verdeelt.

24) Pappos, *Collectio* VIII, 5; 1032, l. 26.

25) ibidem l. 30.

26) ibidem 1034; l. 1—4. Pappos beschouwt dus het werk van Archimedes in ieder geval ook niet als een geheel zelfstandig geschrift, maar als een toepassing van de theorie van het zwaartecentrum.

27) De stelling luidt als volgt: liggen op de zijden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ van een driehoek $\alpha\beta\gamma$ de punten η, ϑ, $\varkappa$, opv. zoo, dat

$$\alpha\eta : \eta\beta = \beta\vartheta : \vartheta\gamma = \gamma\varkappa : \varkappa\alpha$$

dan hebben de driehoeken $\alpha\beta\gamma$ en $\eta\vartheta\varkappa$ hetzelfde zwaartepunt.

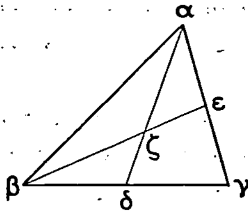


Fig. 119.

die van belang is, om de wijze, waarop hij op grond van de boven weergegeven beschouwingen het zwaartepunt van een driehoek blijkt te bepalen. Hij merkt nl. op (fig. 119) dat, wanneer de driehoek $\alpha\beta\gamma$ (in horizontalen stand) met de zwaartelijn $\alpha\delta$ op den bovenkant van een verticaal steunvlak gelegd wordt, de figuur in evenwicht zal zijn, omdat de driehoeken $\alpha\beta\delta$ en $\alpha\gamma\delta$ gelijke oppervlakten hebben. Hetzelfde geldt voor de zwaartelijn $\beta\varepsilon$ en dus is het snijpunt ζ van $\alpha\delta$ en $\beta\varepsilon$ het zwaartecentrum van den driehoek.

Het fragment van Pappos, dat we hiermede hebben weergegeven, is voor de geschiedenis van de mechanica in meer dan een opzicht interessant; het karakteristieke van de ontwikkeling van dezen tak der physica bestaat nl. in de zeer vroegtijdig optredende neiging, de leer van beweging en evenwicht axiomatisch te behandelen; voor het laatstgenoemde gebied, dat der statica, blijkt die neiging hier nu al zeer duidelijk: op grond van enkele physische ervaringen betreffende het evenwicht van lichamen, die door een smalle horizontale balk worden ondersteund, wordt al spoedig een deductieve behandeling van de leer van het evenwicht gegeven, waarbij de omstandigheden al even sterk worden geidealiseerd, als dat bij den deductieven opbouw van de meetkunde het geval was geweest. De ondersteunde balk wordt een horizontale rechte lijn; voor het ondersteunde lichaam wordt een planimetrische figuur genomen; aan de mate van stabiliteit van het evenwicht wordt geen aandacht gewijd; hoe men het aan zou moeten leggen, om ieder lichaam in zijn zwaartecentrum te ondersteunen, wordt niet nader overwogen; waarschijnlijk moet men zich de opgedane ervaringen ook niet al te sterk gevarieerd voorstellen; men kan volstaan met aan rechthoekige blokken of aan dunne platen van rechthoekigen of driehoekigen vorm te denken.

Het schijnt trouwens, dat het hierbij optredende idealiseeringsproces wel nader theoretisch is beschouwd, namelijk door Archimedes zelf. Heroon merkt althans op [28]), dat men van zwaarte en valbeweging natuurlijk alleen kan spreken bij stoffelijke lichamen,

---

[28]) *Heronis Opera* II, I. p. 62.

maar dat Archimedes voldoende heeft verduidelijkt, in welken zin men aan ruimtelijke of vlakke mathematische figuren toch ook een zwaartecentrum kan toekennen.

De ervaring zal nu verder hebben kunnen leeren, dat een balk of dunne plaat bij achtereenvolgende ondersteuning langs twee evenwijdige rechten van een zelfde platte grensvlak niet beide malen in evenwicht kon zijn. Aan dit feit wordt nu echter (getuige de indirecte redeneering, die Pappos ter zake houdt) reeds dadelijk een karakter van logische evidentie toegekend. De relatie, waarin de twee deelen, die het steunvlak, uitgebreid, in het lichaam bepaalt, tot elkander staan, wordt als een gelijkheidsrelatie tusschen grootheden beschouwd en het parallel zijn van twee zoodanige steunvlakken wordt als ongerijmd gevoeld, omdat, wanneer het eene vlak de deelen A en B oplevert en het andere A_1 en B_1, niet tegelijk met

$$A > A_1, B < B_1 \qquad (1)$$

kan gelden

$$A = B \quad A_1 = B_1 \qquad (2)$$

Deze logische evidentie bestaat natuurlijk slechts in schijn. Pappos ziet niet, dat de evenwichtstorende werking, die elk der deelen van het lichaam uitoefent, niet door het gewicht van dat deel alleen bepaald wordt en dat dus uit de ongerijmdheid van het gelijktijdig bestaan van de relaties (1) en (2) voor de gewichten der onderscheiden deelen logisch niets volgt omtrent de onmogelijkheid, wat den invloed op het evenwicht betreft. Dat hij echter inderdaad uitsluitend aan de grootten der gewichten denkt, blijkt ten duidelijkste uit zijn afleiding van het zwaartecentrum van een driehoek. De twee deelen, waarin een zwaartelijn een driehoek verdeelt, houden elkaar volgens zijn beschouwingswijze bij ondersteuning volgens deze zwaartelijn daarom in evenwicht, omdat ze gelijk zijn in oppervlakte (waaraan het gewicht evenredig wordt gedacht). Volgens dat argument zou er ook evenwicht moeten zijn bij ondersteuning langs iedere andere rechte, die de oppervlakte in twee gelijke deelen verdeelt; zulk een rechte gaat echter alleen door het zwaartepunt, indien ze ook een hoekpunt bevat. En bovendien zou, daar als vanzelfsprekend wordt aangenomen, dat ieder

verticaal vlak door het zwaartecentrum het lichaam in evenstaltwichtige deelen verdeelt, iedere lijn door het zwaartepunt van een driehoek de oppervlakte in twee gelijke deelen moeten verdeelen, wat eveneens onjuist is.

Van hieruit valt nu een onverwacht helder licht op het doel, dat Archimedes met zijn werk over de evenwichten, welks neventitel over zwaartecentra van vlakke figuren spreekt, kan hebben nagestreefd: hij heeft de onjuistheid ingezien van de zoojuist beschreven, blijkbaar uit vroegere tijden afkomstige en door Pappos in zonderlinge onnadenkendheid bewaarde methode ter bepaling van een zwaartecentrum; hij heeft begrepen, dat deelen, die elkaar in evenwicht houden, in het algemeen niet even zwaar zijn, maar dat ook de ligging van hun resp. zwaartecentra in het oog moet worden gevat. Zoo kwam hij tot de beschouwing van een hefboom, aan welks armen de deelen van het lichaam in hun zwaartecentra waren bevestigd en zoo leverde de theorie van den hefboom hem het middel, om zwaartecentra te bepalen, doordat hij slechts behoefte te vragen, in welk punt de hefboom ondersteund moest worden, om evenwicht te verkrijgen. Echter steunde die theorie zelf op de waarschijnlijk reeds lang voor hem beoefende barycentrische leer, die we door Pappos hebben hooren uiteenzetten en waaraan men, ondanks tastbare logische gebreken, een zekere physisch overtuigende werking niet kan ontzeggen. Zoo ontstond de methodisch eenigszins gecompliceerde situatie, dat de hefboomswet eenerzijds een toepassing en anderzijds de grondslag kon zijn van de theorie van het zwaartecentrum.

Tevens is nu echter opgehelderd, hoe Archimedes er toe kon komen, om zonder nadere motiveering het in axioma VI niet al te duidelijk geformuleerde beginsel aan te nemen, dat het bewijs der zesde propositie, zooals we sedert kort beseffen, beschermt tegen de verwijten, waaraan het van de zijde van Mach en zijn aanhangers blootstond: in het zwaartecentrum of valcentrum is van den aanvang af het geheele streven naar omlaag, dat het wezen der zwaarte uitmaakt, geconcentreerd gedacht. Moest het niet evident lijken, dat de invloed, dien een lichaam tengevolge van dat streven op een hefboom kon uitoefenen, niet veranderde, zoolang maar de intensiteit daarvan en de plaats, waar het zetelt, onveranderd bleven?

3. Door de bovenstaande beschouwingen achten we de kwesties, die het begin van het werk *Evenwichten van vlakke figuren* heeft doen rijzen, in voldoende mate toegelicht, om thans de behandeling te kunnen voortzetten.

Propositie 7.

Ook indien echter de grootheden onderling onmeetbaar zijn, zullen ze evenzeer in evenwicht zijn aan lengten, die met de grootheden omgekeerd evenredig zijn.

De noodzaak van afzonderlijke behandeling van het geval, dat de aan den hefboom opgehangen gewichten geen gemeene maat hebben, volgt uit de wezenlijke beteekenis, die in het bewijs van Prop. 6 de gemeene maat Z van de grootheden A en B bezat.

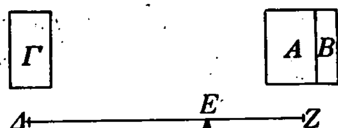


Fig. 120.

Het nogal vluchtig neergeschreven bewijs is als volgt weer te geven:

Laat (fig. 120) de onderling onmeetbare grootheden $A + B$ en Γ zijn, de hefboomsarmen, waaraan zij hangen, resp. EZ en $E\Delta$. Gegeven is dan

$$(E\Delta,\ EZ) = (A + B,\ \Gamma) \tag{1}$$

Te bewijzen is, dat E zwaartecentrum is van $(A + B)$ in Z en Γ in Δ (d.w.z. dat de zwaartecentra der grootheden opv. in deze punten liggen) of m.a.w., dat de hefboom, in E ondersteund, in evenwicht is.

Zij dit niet het geval, dan is $(A + B)$ òf te groot òf te klein voor evenwicht. Zij $(A + B)$ te groot. Neem er dan zooveel af, dat het overblijvende deel nog te groot is voor evenwicht, maar onderling meetbaar met Γ.

Zij die rest A. Nu is

$$(A,\ \Gamma) < (E\Delta,\ EZ) \tag{2}$$

dus slaat de hefboom door naar Δ in strijd met de onderstelling, dat A alleen nog te groot is voor evenwicht. Op soortgelijke wijze kan het geval worden behandeld, dat $(A + B)$ te klein is.

Dit bewijs bevat blijkbaar aanmerkelijke leemten. De mogelijkheid, de rest A zoo te bepalen, dat zij te groot is voor evenwicht en tevens onderling meetbaar met Γ, steunt noch op een axioma,

noch op een propositie. Dat uit de ongelijkheid (2) volgt, dat de hefboom doorslaat naar Δ; is weliswaar physisch aannemelijk, maar logisch niet verantwoord. Het wordt natuurlijk afgeleid uit de overweging, dat er evenwicht zou zijn, wanneer A vervangen werd door $A' > A$, zoodat

$$(A', \Gamma) = (E\Delta, EZ) \qquad (3)$$

dus op grond van Prop. 6, gevolgd door toepassing van axioma III. Maar $E\Delta$ en EZ zijn blijkens (1) onderling onmeetbaar en men kan dus uit (3) alleen tot het bestaan van evenwicht besluiten, wanneer Prop. 7 eerst bewezen is. In het bewijs van Prop. 7 mag dus deze conclusie niet worden gebruikt.

Het bewijs zou, hoewel niet geheel gered, niettemin verbeterd kunnen worden, wanneer men het lijnstuk ΔZ in een punt H zoo verdeelde, dat

$$(A, \Gamma) = (H\Delta, HZ)$$

Hieruit zou wegens Prop. 6 volgen, dat de hefboom, belast met A in Z en met Γ in Δ in evenwicht is. Om dan te besluiten, dat er geen evenwicht kan zijn bij ondersteuning in E, zou men als axioma moeten stellen, dat een systeem van lichamen slechts één zwaartepunt heeft òf men zou de door Pappos gebruikte overweging, dat er niet bij achtereenvolgende ondersteuning langs twee parallele rechten beide malen evenwicht kan zijn, axiomatisch moeten invoeren. Om dan echter nog in te zien, dat de hefboom bij geldigheid van (2) doorslaat naar Δ zou nog een axioma noodig zijn, dat zou uitspreken, dat bij verschuiving van het steunpunt naar een van beide zijden een aanvankelijk in evenwicht verkeerende hefboom naar de andere zijde doorslaat.

Propositie 8.

Indien van een grootheid een grootheid wordt afgenomen, die niet hetzelfde centrum heeft als het geheel, dan is, wanneer de rechte, die de centra der zwaarten van de geheele grootheid en de verwijderde verbindt, verlengd wordt naar die zijde, waar het centrum van de geheele grootheid ligt, en wanneer van het verlengde van de verbindingslijn der genoemde centra een stuk wordt afgesneden, zoodat het dezelfde reden heeft tot het stuk tusschen de centra, die het gewicht van de verwijderde grootheid heeft tot het

gewicht van de overblijvende, het eindpunt van het afgesneden stuk centrum der zwaarte van de overblijvende grootheid.

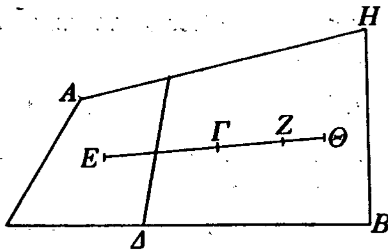


Fig. 121.

Laat (fig. 121) van de grootheid AB met zwaartecentrum Γ het stuk $A\Delta$ met zwaartecentrum E afgenomen zijn. Op het verlengde van $E\Gamma$ is Z bepaald, zoodat

$$(Z\Gamma, E\Gamma) = (A\Delta, H\Delta) \quad (1)$$

Te bewijzen is dat Z centrum der zwaarte van ΔH is.

Bewijs: Stel, dat een ander punt, Θ, centrum der zwaarte van ΔH is. Daar AB uit $A\Delta$ en $H\Delta$ is samengesteld, moet het centrum van de zwaarte van AB een punt O op $E\Theta$ zijn, bepaald door

$$(\Theta O, EO) = (A\Delta, H\Delta)$$

Dus is Γ niet het centrum der zwaarte van AB in strijd met de onderstelling.

Men zou hierbij kunnen vragen, waarom Θ met E en Γ collineair is; is dit nl. niet het geval, dan komt geen contradictie tot stand. Het bewijs zou daarom beter als volgt gegeven kunnen worden:

Daar Γ centrum der zwaarte van AB is, moet Γ op $E\Theta$ liggen, zoodat

$$(\Theta\Gamma, E\Gamma) = (A\Delta, H\Delta)$$

Door vergelijking met (1) blijkt nu onmiddellijk, dat Θ met Z samenvalt.

Propositie 9.

Van ieder parallelogram ligt het centrum der zwaarte op de rechte, die de middens van de overstaande zijden van het parallelogram verbindt.

Laat gegeven zijn het parallelogram $AB\Gamma\Delta$ (fig. 122), waarin E en Z opv. de middens zijn van AB en $\Gamma\Delta$. Te bewijzen is, dat het centrum der zwaarte van $AB\Gamma\Delta$ op EZ ligt.

Stel, dat dit niet het geval is, maar dat het centrum der zwaarte een punt Θ buiten EZ is. Laat dan de rechte door Θ evenwijdig aan AB de rechte EZ in I ontmoeten. Pas nu op EB dichotomie

toe (III; 0,5); totdat de verkregen deelen (elk gelijk aan EK) kleiner zijn dan ΘI en trek door de verkregen deelpunten lijnen parallel aan EZ. Aan de andere zijde van EZ evenzoo handelend, verdeelt men $AB\Gamma\Delta$ in een even aantal parallelogrammen, die alle congruent zijn met KZ. Wanneer men al die parallelogrammen achtereenvolgens

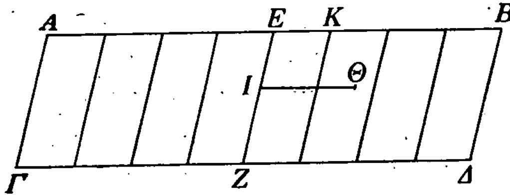


Fig. 122.

met KZ tot dekking brengt, vallen de centra der zwaarte met dat van KZ samen (axioma IV). Al die centra liggen dus op een rechte parallel aan AB. Door toepassing van Prop. 5, Coroll. 2, ziet men nu in, dat het centrum der zwaarte van AB moet liggen op het lijnstuk, dat de centra der middelste parallelogrammen tot eindpunten heeft. Dus kan het niet Θ zijn; immers $EK < I\Theta$.

Propositie 10.

Van ieder parallelogram is het centrum der zwaarte het punt, waarin de diagonalen elkaar ontmoeten.

Volgens Prop. 9 ligt het centrum der zwaarte op elk der beide rechten, die middens van overstaande zijden verbinden; door het snijpunt dezer rechten gaan echter ook de diagonalen.

Een tweede bewijs (fig. 123) wordt gegeven door beschouwing van de driehoeken, waarin de diagonaal $B\Delta$ het parallelogram $AB\Gamma\Delta$ verdeelt. Daar deze driehoeken congruent zijn, zullen de zwaartecentra samenvallen, wanneer de driehoeken met elkander tot dekking worden gebracht (axioma IV). Zij nu E het centrum der zwaarte van $\triangle AB\Delta$, Θ

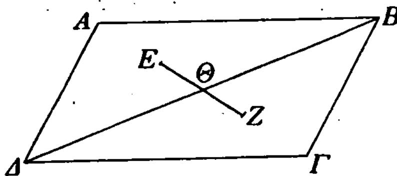


Fig. 123.

het midden van ΔB, Z een punt op het verlengde van E, zoodat $E\Theta = \Theta Z$. Wanneer nu $\triangle AB\Delta$ tot dekking wordt gebracht met $\triangle \Gamma\Delta B$, zal E op Z vallen, dus is Z centrum der zwaarte van $\triangle \Gamma\Delta B$ en dus wegens Prop. 4 Θ centrum der zwaarte van $AB\Gamma\Delta$.

Propositie 11.

Indien twee driehoeken gelijkvormig met elkander zijn en er liggen in deze driehoeken punten gelijkelijk ten opzichte van de driehoeken en het eene punt is centrum der zwaarte van den driehoek, waarin het ligt, dan is ook het andere punt centrum der zwaarte van den driehoek, waarin het ligt.

Wat „gelijkelijk gelegen" beduidt, is toegelicht bij axioma V. Het bewijs wordt uit het ongerijmde geleverd door te onderstellen, dat een ander punt zwaartecentrum zou zijn en dan axioma V toe te passen; het berust dus op de ondubbelzinnigheid van de relatie der gelijke ligging.

Propositie 12.

Indien twee driehoeken gelijkvormig zijn en het centrum der zwaarte van den eenen driehoek ligt op de rechte, die van één hoekpunt naar het midden van de basis getrokken is, dan zal ook van den anderen driehoek het centrum der zwaarte op de gelijkelijk getrokken rechte liggen.

Het bewijs berust op Prop. 11 in verband met de planimetrische stelling, dat punten, die homologe zwaartelijnen van gelijkvormige driehoeken in homologe evenredige deelen verdeelen, gelijkelijk gelegen zijn ten opzichte van die driehoeken.

Het schijnt, dat deze propositie nergens wordt toegepast.

Na deze inleidende stellingen wordt thans de ligging van het zwaartecentrum van een driehoek afgeleid. Het voornaamste werk wordt gedaan in

Propositie 13.

Van elken driehoek ligt het centrum der zwaarte op de rechte, die uit een hoekpunt naar het midden van de basis getrokken is.

Zij (fig. 124) Δ het midden van de basis $B\Gamma$ van $\triangle\, AB\Gamma$. Stel, dat het zwaartecentrum Θ van $\triangle\, AB\Gamma$ niet op $A\Delta$ ligt. We weten dan alleen, dat Θ binnen $\triangle\, AB\Gamma$ ligt (axioma VII). Laat de rechte door Θ parallel met $B\Gamma$ de rechte $A\Delta$ in I ontmoeten. Pas nu op $B\Gamma$ dichotomie toe (III; 0,5), totdat de verkregen deelen (elk gelijk aan $\Delta\Omega$) kleiner zijn dan ΘI; trek door de deelpunten rechten parallel met $A\Delta$ en verdeel den driehoek op de in figuur 124 aangegeven wijze in parallelogrammen (MN, $K\Xi$ enz.) en driehoeken ($A\Sigma M$, $Z\Psi\Gamma$ enz.) Wegens Prop. 9 liggen de zwaartepunten der parallelogrammen alle op $A\Delta$, dus het zwaartecentrum P van de figuur $\mathbf{X}_{\Pi}$, die uit alle parallelogrammen bestaat, eveneens (Prop. 6). Verbind P met Θ; laat deze rechte in Π de rechte ΩM ontmoeten en in Φ de rechte, die door Γ parallel met $A\Delta$ getrokken is. Π ligt dan tusschen P en Θ, Φ buiten den driehoek.

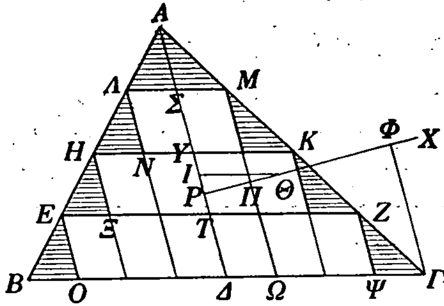


Fig. 124.

Er wordt nu nagegaan, hoe het zwaartecentrum van de figuur $\mathbf{X}_{\Delta}$, die uit alle gearceerde driehoeken bestaat, ten opzichte van de punten P, Θ, Φ gelegen moet zijn.

We vergelijken daartoe eerst de oppervlakte van $\triangle\, AB\Gamma$ met de som van de oppervlakten van de gearceerde driehoeken. Wegens gelijkvormigheid geldt:

$$(A\Delta\Gamma,\ A\Sigma M) = [\mathbf{T}(A\Gamma),\ \mathbf{T}(AM)] \text{ enz.}$$

dus

$$(A\Delta\Gamma,\ A\Sigma M + \ldots + Z\Psi\Gamma) = [\mathbf{T}(A\Gamma),\ \mathbf{T}(AM) + \ldots + \mathbf{T}(Z\Gamma)] =$$
$$= [\mathbf{T}(A\Gamma),\ \mathbf{O}(AM,\ A\Gamma)] = (A\Gamma,\ AM).$$

Evenzoo

$$(A\Delta B,\ A\Sigma\Lambda + \ldots + EOB) = (AB,\ A\Lambda) = (A\Gamma,\ AM).$$

Dus

$$(AB\Gamma,\ \mathbf{X}_{\Delta}) = (A\Gamma,\ AM) = (\Delta\Gamma,\ \Delta\Omega) = (P\Phi,\ P\Pi) > (P\Phi,\ P\Theta)$$

en dus *separando*

$$(\mathbf{X}_\Pi, \mathbf{X}_\Delta) > (\Theta\Phi, \Theta P).$$

Bepaal nu een punt X op de rechte $P\Phi$, zoodat

$$(\mathbf{X}_\Pi, \mathbf{X}_\Delta) = (\Theta X, \Theta P)$$

dan is $\Theta X > \Theta\Phi$, dus ligt X op het verlengde van $P\Phi$.

Wegens Prop. 8 is nu X zwaartecentrum van de figuur $\mathbf{X}_\Delta$, die uit de gearceerde driehoeken bestaat, wat onmogelijk is, omdat al deze driehoeken gelegen zijn aan de andere zijde van de rechte door Γ parallel met $A\Delta$ getrokken dan X.

De laatste conclusie steunt niet (zooals Heiberg meent) [29]) op axioma VII. Immers de omtrek van de figuur $\mathbf{X}_\Delta$ is niet „hol naar denzelfden kant". Zij moet veeleer getrokken worden gedacht op grond van de overweging, dat, wanneer men van een figuur, welker deelen alle aan één zijde van een rechte liggen, het zwaartecentrum vindt, door met behulp van Prop. 6 twee deelen samen te nemen, hun combinatie met een derde te vereenigen enz. het zwaartecentrum van de geheele figuur aan dezelfde zijde van de rechte moet liggen, aan welke alle deelen gelegen zijn.

In een tweede bewijs van Prop. 12 (fig. 125) verbindt Archimedes het ondersteide zwaartecentrum Θ met A, B en Γ en trekt door de middens E en Z van AB en $A\Gamma$ rechten parallel met $A\Theta$, die $B\Theta$ en $\Gamma\Theta$ opv. in K en Λ ontmoeten. In de gelijkvormige driehoeken $AB\Gamma$ en $EB\Delta$ zijn Θ en K gelijkelijk gelegen punten, dus is (Prop. 11) K zwaartecentrum van $\triangle\ EB\Delta$, evenzoo Λ van $\triangle\ Z\Gamma\Delta$. Daar verder de oppervlakten der driehoeken $EB\Delta$ en $Z\Gamma\Delta$ gelijk zijn, ligt het zwaartecentrum van hun combinatie in het midden van $K\Lambda$, d.i. het snijpunt N met $\Theta\Delta$. Van het parallelogram $AE\Delta Z$ is M het zwaartecentrum; het zwaartecentrum van $\triangle\ AB\Gamma$ ligt dus op MN en kan dus niet Θ zijn. Θ kan dus niet buiten $A\Delta$ liggen.

Fig. 125.

---

29) *Opera* II, 155 noot 3.

Propositie 14.

Van elken driehoek is het centrum der zwaarte het punt, waarin de rechten van den driehoek, die van de hoekpunten naar de middens der zijden getrokken zijn, elkander ontmoeten.

Dit volgt onmiddellijk uit Prop. 13.

Als besluit van Boek I wordt thans nog het zwaartecentrum van een trapezium bepaald.

Propositie 15.

Van elk trapezium, dat twee zijden parallel met elkander heeft [30]*, ligt het centrum der zwaarte op de rechte, die de middens der evenwijdige zijden verbindt, zoo verdeeld, dat het stuk ervan, dat het midden van de kleinste der evenwijdige zijden tot eindpunt heeft, tot het overblijvende stuk de reden heeft, die de som van het dubbele van de grootste en de kleinste tot de som van het dubbele van de kleinste en de grootste der evenwijdige zijden heeft.*

Laat (fig. 126) van het trapezium $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) de opstaande zijden verlengd elkaar in H ontmoeten; Z en E zijn opv. de middens van $B\Gamma$ en $A\Delta$. De zwaartecentra van de driehoeken $HB\Gamma$ en $HA\Delta$ liggen volgens Prop. 13 op HZ, dus ligt (Prop. 8 en Axioma VII) het gezochte zwaartecentrum van $AB\Gamma\Delta$ op het lijnstuk EZ.

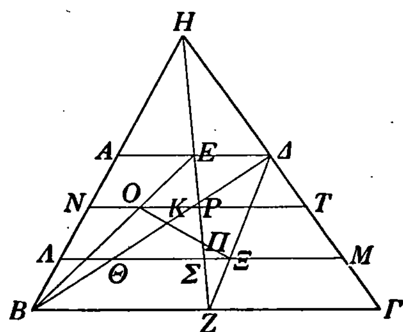


Fig. 126.

Verdeel nu $B\Delta$ in drie gelijke deelen door de punten K en Θ en trek door deze punten NT en ΛM parallel met $B\Gamma$. Nu is het snijpunt Ξ van ΛM en ΔZ zwaartecentrum van $\triangle\, \Delta B\Gamma$ en evenzoo het snijpunt O van $N\Gamma$ en BE zwaartecentrum van $\triangle\, BA\Delta$. Het zwaartecentrum van het trapezium is dus het snijpunt van EZ en $O\Xi$. Nu is wegens Prop. 6 of 7

$$(\Delta B\Gamma, BA\Delta) = (O\Pi, \Xi\Pi) = (P\Pi, \Sigma\Pi)$$

[30]) Trapezium zonder meer beduidt vierhoek.

dus ook

$$(B\Gamma, A\Delta) = (P\Pi, \Sigma\Pi)$$

dus

$$(B\Gamma, P\Pi) = (A\Delta, \Sigma\Pi) = (2B\Gamma + A\Delta, 2P\Pi + \Sigma\Pi) =$$
$$= (B\Gamma + 2A\Delta, P\Pi + 2\Sigma\Pi).$$

Hieruit volgt

$$(2B\Gamma + A\Delta, \Pi E) = (B\Gamma + 2A\Delta, Z\Pi)$$

wat aequivalent is met het gestelde.

DE GEGEVENS IN DE WERKSTUKKEN VAN HET EINDEXAMEN IN DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES.

Het is goed, dat een examenvraagstuk zo duidelijk gesteld is, dat elk misverstand uitgesloten is; als de duidelijkheid niet te veel omhaal eist en men die niet kan vermijden, dan is er op een lang verhaal geen enkele aanmerking te maken. Indien men dit vermijden kan, eenvoudig, kort en goed, dan zal het zaak zijn onnodige breedsprakigheid te vervangen door dat korte. We laten hieronder zien, dat de werkstukken van de eindexamens H.B.S. voor het vak Beschrijvende Meetkunde in een betere vorm kunnen worden gegoten.

De gegevens bevatten eerst de plaats van de as van projectie; men zegt daarna, hoe ver één punt op de as, of één ophaallijn van de linkerkant van het papier genomen moet worden en daarnaar bepaalt men de andere gegevens: de plaats van een of meer punten, de ligging van doorgangen, de projecties van een lijn, natuurlijk ook nog, wat er geprojecteerd moet worden. Aan het laatste is gewoonlijk niet veel te bekorten, aan de eerste drie des te meer.

Reeds in de eerste lessen wordt een punt aangegeven door zijn drie coördinaten; enige oefeningen en de leerlingen tekenen met gemak de 1e en de 2e projectie van P (5, 4, 2), Q (8, 0, 1), enz.; de naam van eenheid cm laten we weg; dat spreekt zo vanzelf, dat het niet nodig is, cm er bij te zetten; de 3e projectie laten we schieten. Het doet nu zonderling aan, dat aanduidingen als A (6, 4, 0), B (2, 8, 2) slechts zelden voorkomen in de eindexamenwerkstukken; en het is zo eenvoudig de as vast te leggen door een

kleine omschrijving en daarop een punt O aan te geven; waarna elk punt door zijn x, y en z wordt bepaald, kort en goed.

Dan de aanduiding van de doorgangen van vlakken met de bekende opening onder naar links enz., terwijl de doorgangen van een vlak zo gemakkelijk zijn aan te geven. De richting van de as is van O naar X; zij A het snijpunt van het vlak met OX; met AA_1 bedoelen we de doorgang op het horizontale vlak voor het vertikale, met AA_2 die op het vertikale vlak boven het horizontale; beide zijn halve lijnen met A als beginpunt. We wijzen deze halve lijnen eenvoudig als volgt aan:

$\angle (OX, AA_1) = 30°$, $\angle (OX, AA_2) = 120°$. Dit staat in plaats van: „de horizontale doorgang van het vlak maakt met de as een hoek van 30°, opening naar rechts, terwijl de vertikale doorgang met OX een hoek maakt van 120° boven naar rechts," wat bovendien niet goed is, daar de as en de doorgangen rechten zijn, waarop geen richting is aangegeven. „Ieder weet wel, wat er bedoeld wordt", waarop mijn antwoord is: „'t kan wel, maar als er een eenvoudige korte manier is om het bedoelde nauwkeurig uit te drukken, zouden we dan het vage, dat niet in orde is, maar niet liever door het juiste vervangen?" Waarbij ik voeg, dat het vage schijnbaar (blijkbaar?) meer aantrekkelijkheid heeft voor vele docenten dan het gave; het gave kunnen we echter alleen in de wiskunde gebruiken.

Een lijn wordt op verschillende manieren gegeven, b.v. l door A (2, 0, 8) en B (7, 5, 0), m door C (4, 0, 4) in V_2, terwijl $\angle (m, OX) = 45°$ is; n door D (5, 0, 0) en waarvan $\angle (n_1, OX) = 60°$, $\angle (n_2, OX) = 45°$ is; $p \mathbin{//} OX$ door P (4, 5, 5). Met m_1 wordt de halve lijn op V_1 bedoeld tot de as OX, met m_2 die op V_2, in overeenstemming met de halve doorgangen.

Laten we nu eens zien, welke vereenvoudiging dit geeft. Ik neem daarvoor enige werkstukken van het schriftelijk eindexamen H.B.S. 5 j. c. in Indië; tussen haakjes: mooie opgaven, maar wat aan de zware kant; dit geldt ook voor de werkstukken, die men in ons land opgeeft; ik meen, dat de uiterste grens met de Beschrijvende Meetkunde reeds lang bereikt is!

Links vindt men de oorspronkelijke opgave met twee verticale strepen er in. Wat daar tussen staat vindt men verkort weergegeven rechts.

1. Neem de korte zijde van het papier voor. Trek in het midden de as van projectie |, neem op deze as een punt A 8 cm van de linkerzijde van het papier. Een vlak α gaat door A; zijn verticale doorgang maakt een hoek van 45°, zijn horizontale doorgang een hoek van 60° met de as van projectie (openingen naar rechts).

Een punt B op de as van projectie ligt 5 cm links van A. Door B gaat een lijn *b*, die gelegen is in het deelvlak van de eerste ruimtehoek. De verticale projectie van *b* maakt een hoek van 30° met de as van projectie (opening naar rechts).

Een lijn *c* staat loodrecht op het verticale vlak en is 5 cm van het horizontale vlak verwijderd; het horizontaal projecterend vlak van *c* ligt op 5 cm afstand rechts van A. |

Men vraagt:

a. Een lijn *x* te construeren, die *c* kruist op een afstand van 4 cm, loodrecht staat op vlak α en *b* snijdt.

b. De ware lengte van de afstand van het snijpunt van *b* en *x* tot het vlak α te bepalen.

[1]) OX; O 1 cm van links, X geheel rechts. Een vlak α gaat door A (8, 0, 0); $\angle$ (OX, AA_2) = 45°, $\angle$ (OX, AA_1) = 60°; neem het punt B (3, 0, 0) en door B de lijn *b* in het deelvlak van de eerste ruimtehoek; $\angle$ (OX, b_2) = 30°; neem een lijn *c* $\perp$ V_2 door C (13, 0, 5).

2. Trek de as van projectie evenwijdig aan de smalle zijde van het papier, 10 cm van de bovenkant. |

In het horizontale projectievlak ligt een regelmatige vijfhoek ABCDE.

, O 1 cm van links, X geheel rechts. In V_1 ligt een regelmatige

---

[1]) De gehele figuur wordt 1 cm naar rechts verschoven, als men O 1 cm van de rand af neemt.

Van het middelpunt M ligt M_2 6 cm van de linkerkant van het papier en M_1 5 cm onder de as. Straal omgeschreven cirkel = 3 cm.

Het hoekpunt A ligt het dichtst bij de as en de middellijn door A staat loodrecht op de as. B ligt rechts van A.

Deze vijfhoek is het grondvlak van een afgeknot 5-zijdig prisma, waarvan de opstaande ribben evenwijdig lopen aan het verticale vlak en hoeken van 60° maken met het horizontale vlak (opening naar rechts).

Als de opstaande ribbe E*e* = 7 cm; A*a* = 6 cm en B*b* = 3 cm, vraagt men te construeren:

1e. de doorgangen van het vlak bepaald door de punten *e*, *a* en *b*;

2e. de 1e en 2e projectie van het afgeknotte prisma en

3e. de ware grootte van het bovenvlak.

vijfhoek ABCDE met middelpunt M(6, 5, 0); A (6, 2, 0), de letters rechts rondgaande.
Deze vijfhoek is het grondvlak van een afgeknot prisma

a b c d e
ABCDE,

waarvan A*a* // V_2 is en $\angle$ (OX, A*a*) = 60°; A*a* = 6, B*b* = 3 en E*e* = 7. Men vraagt te construeren:

3. Trek de as van projectie in het midden van het papier evenwijdig aan de smalle zijde van het papier.

Een vlak α snijdt de as van projectie in een punt A, dat 2 cm van de linkerkant van het papier ligt. Dit vlak α heeft een horizontale doorgang, die een hoek van 30° (opening naar rechts) met de as van projectie maakt, terwijl de verticale doorgang α_2 een hoek van 60° (opening naar rechts) met die zelfde as maakt.

Een punt P ligt 4,5 cm boven het horizontale vlak en 3 cm voor het verticale vlak. De projectie van P op de as ligt 1,5 cm rechts van A.

Neem O 1 cm van links en verder een vlak α door A (2, 0, 0), terwijl $\angle$ (OX, α_1) = 30°, $\angle$ (OX, α_2) = 60° is; verder een punt P ($3\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$).

geven. Tafel III, de sinustafel, in tegenstelling met tafel II, de logarithmen sinustafel, geeft de waarden van de goniometrische functies om de minuut met aanwijzing, in hoeverre geïnterpoleerde waarden van de cotangens nog betrouwbaar zijn.

De inrichting van tafel II verschilt iets van de gewone; als toch de getallen van lange kolommen beginnen met hetzelfde drietal cijfers, doet men beter, die maar weg te laten; daardoor heeft men beter zicht op de getallen. Het vlugge zoeken en terugzoeken wordt mede bevorderd, doordat men in Tafel II op twee naast elkaar liggende bladzijden twee volle graden overziet, in Tafel III zelfs vier.

Mochten er nog wensen zijn voor deze tafel, die niet reeds vervuld zijn door Gonggrijp's Tafel D of Versluys' Tafel H, dan zal men mij zeer verplichten mij daarvan in kennis te stellen. Tevens verzoek ik gebruikers mij te wijzen op mogelijke drukfouten.

Amsterdam Zuid. P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

UIT HET VOORBERICHT BIJ DE TWEEDE DRUK.

Tevreden gebruikers hebben mij nog het volgende meegedeeld om bij voorkomende gelegenheid van gebruik te maken; deze doet zich thans reeds voor.

1) Ook de tafel van de gewone logarithmen is heel handig, daar men op twee bladzijden naast elkaar een vol honderdtal overziet.

2) De logarithmen-sinustafel heeft alle secondentafeltjes rechts; op elke bladzijde staat een volle graad, dus van 5° af op twee naast elkaar staande bladzijden twee volle graden.

3) Toe te juichen is het opnemen van de sinustafel; (men vindt deze echter ook reeds in Gonggrijp's tafel D, in Versluys' tafel H en thans ook in de tafel van Van Pesch). Een tafel met opklimming om de minuut is nodig, om de 15 minuten is volstrekt doelloos; immers het nut gaat weer verloren wegens tijdrovende interpolaties, waarvan bovendien niet is aangegeven, in hoeverre die juist zijn.

Van deze gelegenheid maak ik tevens gebruik om mijn zienswijze te geven over de rentetafels en om een paar vragen te beantwoorden.

a) „Waarom zo'n drukte gemaakt van de kleine hoeken? Ze komen haast niet voor", merkt men op. Mijn antwoord daarop is: inderdaad, als de H.B.S. en het Gymnasium ze vermijdt, komen ze daar niet voor en op vele scholen moesten de leraren de kleine hoeken wel vermijden, omdat hun tafel hen in de steek laat, waar het er juist op aankomt. Beperkt men zich tot driehoeken en vierhoeken, dan ontgaat men de kleine hoeken gemakkelijk; maar de practijk zal ze dikwijls eisen b.v. bij wegenbouw. Nu weet ik wel, dat de middelbare school zich niet met allerlei toepassingen al van te voren kan bezighouden, maar ik vind toch, dat men op voldoende belangstelling zal kunnen rekenen, als men b.v. opgeeft: „De afstand van de aarde tot de maan is 384395 km; de middellijn van de maan is 3472,8 km; onder welke hoek wordt de maan door ons gezien?" of: „Bereken de kimduiking, die een vliegenier kan waarnemen op 3000 m hoogte; de straal van de aarde te rekenen op 6378,4 km". Bij beide komen „kleine hoeken" voor. De lezer zal ze met meerdere kunnen aanvullen. Of men nu zulke vraagstukjes maakt of niet, doet er niet toe, dat moet ieder voor zich zelf weten, maar dat men het bestaan van enige zwarigheid in de logarithmentafel voor het interval tot 2° en boven 88° verzwijgt, lijkt me toch minder goed.

De tafels van Van Pesch, Versluys en Gonggrijp besteden natuurlijk behoorlijke zorg aan de genoemde intervallen, ook de Schooltafel, deze op een geheel andere manier; deze alle vier voldoen aan alle eisen, die de school kan stellen.

b) Men heeft mij gevraagd om interpolatietafels in de sinustafel; het aantal verschillen is door de sterke afwijking van de cotangens echter zo groot, dat deze zeker drie vel druks zouden moeten beslaan. Bovendien zouden alle bijzondere manieren om in 5 decimalen nauwkeurig te kunnen interpoleren ook moeten worden opgenomen. Volledig en afdoende is daarin echter reeds voorzien door Versluys Grote tafel H.

In de „sinustafel" kan men tussen de minuten overal evenredig interpoleren, behalve in de cotangenten tot 9°30′, in de tangenten van 80°30′ tot 90°.

P. W.

LOGARITHMEN- EN RENTETAFELS.

Voor scholen, waar men geen goniometrie leert, maar wel sam. intrest.

P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel A, 6e druk,** gec. . . f 0.60.
Deze bevat: Aanwijzingen. Gewone log. Log. van constanten. Log. van rentefactoren. Rentetafels **I** $(1 + i)^n$; **II** $(1 + i)^{-n}$ voor de procenten 2, 2½, 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½ en 6. Machten, wortels en omgekeerden.

P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel B, 11e druk,** gec. . f 0.75.
Inhoud als A en bovendien Rentetafel **III** $\Sigma\ (1 + i)^n$; **IV** $\Sigma\ (1 + i)^{-n}$; **V** Annuïteitentafel.

P. WIJDENES, **Log. tafel C, 2e druk** . . . . f 0.40.
Inhoud als A, maar zonder rentetafels en aanwijzingen.

Voor Wisk. L.O.; H.B.S.; Gymn.

P. WIJDENES, **Rentetafel D, 2e druk** . . . . f 0.50.
Deze bevat de rentetafels I, II, III, IV en V onder A en B hierboven genoemd, met **50** termijnen.

Voor examens in Handelsrekenen, H. Handelsscholen, banken, kantoren, accountants.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Log.- en Rentetafel E, 2e druk,** gec. met hulpboekje . . . . . f 3.25.
Deze bevat de gewone log. en de vijf tafels voor samengestelde interest, verder de vijf overeenkomstige voor samengesteld disconto in 100 termijnen en procenten van ½ tot 8 met ½ % opklimmende.

Tafel G. Logarithmen- en rentetafels, in slap linnen . . f 1.60
Tafel G is de **schooluitgave van tafel E,** nl. zonder de discontotafels.

H.B.S. 5-j. c., Gymn., Kl, Delft Landmeter, Wiskunde L.O.; Studenten.

J. VERSLUYS, **Grote tafel H,** in drie kleuren, 298 blz. **3de druk,** gebonden . . . . f 2.90
Wit I. Gewone logarithmen blz. 1-32. — Rose II. De log. der gon. functies blz. 1-96. — Wit III. De gon. functies met interpolatietafels blz. 1-128. — Groen IV. Bijtafels blz. 130-170.

A. Natuurlijke logarithmen.
B. Omzetting van natuurlijke logarithmen in gewone.
C. Gon. verh. van hoeken in radialen uitgedrukt.
D. Exponentiële en hyperbolische functies.
E. Factorentafel en tafel der priemgetallen.
F. Machten, wortels en omgekeerden.
G. Enige constanten met hun logarithmen.

☞ Wilt gij weten, welke tafel voor U of voor Uw school geschikt is, vraag dan inlichtingen aan P. WIJDENES, Jacob Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid, Tel. 27119.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA.
Ook verkrijgbaar bij de boekhandel.

Construeer een gelijkbenige driehoek PQR, die aan de volgende voorwaarden voldoet:

a. het vlak van die driehoek staat loodrecht op α;

b. de basis QR van die driehoek ligt in α en maakt gelijke hoeken met α_1 en α_2;

c. PQ maakt een hoek van 60° met α.

Verlangd wordt het tekenen van slechts één driehoek.

4. Trek de as van projectie in het midden van het papier evenwijdig aan de lange zijde van het papier.

Op deze as liggen de punten P_1, A en B opv. 12,5 cm, 17,5 cm en 30 cm van de linkerkant van het papier. Door A is een lijn l in het horizontale vlak en voor het verticale vlak getrokken, die een hoek van 30° maakt met de as (opening naar rechts). Door B is een lijn m in het verticale vlak en boven het horizontale vlak getrokken, die een hoek van 45° maakt met de as (opening naar links). P_1 is de horizontale projectie van een punt P, dat 4 cm boven het horizontale vlak ligt.

a. Bepaal een punt Q in het horizontale vlak, zodat PQ een hoek van 45° maakt met het horizontale vlak en de as op een afstand van 2,5 cm kruist.

Q moet vóór het horizontale vlak en rechts van P liggen.

b. Bepaal een lijn s, die l en m snijdt en evenwijdig is aan PQ.

c. Bepaal de ware grootte van de standhoek, die het vlak door l en s maakt met het vlak van m en s.

, O 1 cm van links. Neem P $(12\frac{1}{2}, 0, 4)$, A $(17\frac{1}{2}, 0, 0)$ en B $(30, 0, 0)$; een lijn l in V_1 door A zo, dat $\angle (OX, l) = 30°$ is, een lijn m door B in V_2 zo, dat $\angle (BO, m) = 45°$ is.

BOEKBESPREKINGEN.

P. J. ten Have, *Begrijpen en Weten*. Een serie denk- en repetitievragen over de natuurkunde. Noordhoff 1939.

Deze verzameling van vragen over de natuurkunde zal voor menig examen-candidaat voor gymnasium of H.B.S. B en voor het Staatsexamen B een welkome gids kunnen zijn, en een geschikte repetitor tevens.

Een gevaar is, dat zulk een boekje als een soort cathechismus gebruikt zou worden; zó heeft de schrijver het zeker niet bedoeld! Voordat een leerling dit boekje gaat gebruiken, om zich zelf op de proef te stellen, dient hij een *overzicht* te hebben over de gehele leerstof en bovendien *inzicht* in de natuurkunde.

Uit den aard der zaak kan dit alleen verkregen worden door ingespannen studie; deze verzameling van vragen kan daaraan niets veranderen!

Examineren is een kunde en een kunst op zich zelf. Het is vooral de ervaring, die een docent tot een goed examinator kan maken; bovendien is het een gave, die de een in veel hoger mate dan den ander eigen is. De examinator, die in dit boekje aan het woord is, verstaat wel de kunst om vragen te stellen. Toch zullen in de practijk van het examineren de vragen heel wat korter en beknopter gesteld moeten worden, dan in deze verzameling vaak het geval is. Zo zullen de vragen op pag. 35 over de breking van het licht en over de totale reflectie zeker stuk voor stuk dienen gesteld te worden, opdat de candidaat zich telkens rustig kan bezinnen. Ik vermoed, dat dit ook wel de bedoeling van den schrijver is, al is de examinator dan ook op pag. 35 altijd maar zelf aan het woord.

Voor de leerlingen van dezen examinator zelf heeft deze verzameling uit de aard der zaak de meeste waarde. Andere docenten stellen de vragen anders of zij examineren anders.

Inmiddels zal het *elke* examen candidaat ten goede kunnen komen, wanneer hij zich zelf voor de beantwoording van deze vragen stelt, maar dan ook zo, dat hij voldoende middelen tot zelfcritiek heeft, om te controleren, of hij het inderdaad weet.

E. E. Mogendorff.

Nathans en Lindeman, *Natuurkunde voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs*. Deel III. Noordhoff 1939.

Het derde deel van dit natuurkunde leerboek bevat de leerstof van magnetisme en electriciteit, die volgens het oude leerplan voor de H.B.S. B gewoonlijk in de hoogste klasse werd behandeld. Het kan dus gebruikt worden op die scholen, waar de oude volgorde gehand-

haafd is gebleven. In dit verband zou men mogen verwachten, dat er geen integraalteken en geen differentiaalquotiënt in dit leerboek werd gebruikt, omdat deze leerlingen, die het oude leerplan op de H.B.S. B hebben gehad, nog geen notie hebben van de infinitesimaalrekening. De wiskundige afleiding van de potentiaal op pag. 44 en de uitdrukking voor de E. M. K. van inductie op pag. 144 en pag. 147 zijn dus in dit leerboek niet op hun plaats en de vraag na *d* op pag. 147 is voor een „oude" vijfde klasse leerling te moeilijk.

Ook de behandeling van de bouw der atomen is volgens het oude leerplan niet vereist; de omvang van de leerstof is trouwens van die aard, dat de meeste docenten hiervoor geen tijd beschikbaar zullen hebben.

Zoals wij van deze schrijvers gewend zijn, is de stijl duidelijk en de volgorde logisch; de vragen tussen de tekst zijn geschikt, om de leerlingen te laten nadenken. De experimenten zijn goed gekozen en duidelijk beschreven.

Hier en daar wordt aan de exactheid te kort gedaan bijv. op pag. 2 bij de definitie van de polen van een magneet; de schrijvers bedoelen zeker in § 2b te zeggen, dat de verbindingslijn van de polen ongeveer de richting noord-zuid aanwijst. Bij de kompasnaald dient vermeld te worden, dat het zwaartepunt onder het steunpunt ligt, zodat de naald ten opzichte van de zwaartekracht in stabiel evenwicht is.

De regel voor de krachtlijnen bovenaan blz. 14 komt uit de lucht vallen; deze regel kan men beter voor een eenvoudig geval door het invoeren van éénheidsbuizen afleiden.

Voor de zo gewenste beperking zouden par. 35 en par. 39 wel achterwege kunnen blijven. Daarentegen bij de zo belangrijke spoelampèremeter (pag. 108) ware een uitvoeriger behandeling wel gewenst. Hier kon vermeld worden, dat de spoel in een radiaal veld draait en dat dientengevolge de hoek van draaiing recht evenredig met de stroomsterkte verandert. De onbewegelijke ijzeren kern heeft dus nog een andere strekking, dan die ter versterking van de magnetische werking.

De tekeningen zijn duidelijk en de tekst erbij is overzichtelijk, zodat het studeren met dit leerboek voor de leerlingen vele moeilijkheden uit de weg ruimt. E. E. Mogendorff.

Dr. E. J. Dijksterhuis, *Vreemde woorden in de Wiskunde.*

Het verschijnen van een boekje als het hierbij aangekondigde hebben wij met groot genoegen begroet; wie uit ervaring weet, hoevelen, ook onder de gestudeerden, de wiskundige vaktermen verhaspelen en misverstaan, zal geredelijk toegeven, dat het heel wat nut kan stichten. Het werk, dat den kundigen en nauwgezetten auteur geen geringe arbeid zal hebben gekost, bevat de verklaring van 865 wiskundige termen. Het zij vooral hun, die in de wiskunde studeren, warm aanbevolen; echter zal ook menigeen, die afgestudeerd is, nog veel uit het boekje kunnen leren, zelfs als hij een klassieke vooropleiding heeft genoten. de J.

KORRELS.

XLIII. AFTREKKING.

In vele rekenkunde- en algebraboeken vindt men als definitie voor aftrekken een of andere formuleering, die op het volgende neerkomt: *a* van *b* aftrekken is de bewerking, die ons het getal leert vinden, dat, opgeteld bij *a*, *b* tot som geeft. Deze definitie treft men b.v. aan in: Beknopte Rekenkunde van P. Wijdenes, derde druk. Ze lijkt me zeer aanvechtbaar.

Men kan er van uitgaan, dat optellen een eenvoudiger bewerking is dan aftrekken en dat het dus zijn voordeelen heeft om aftrekken terug te brengen tot optellen, al is het dan in dit geval het optellen van een getal met een ander (het verschil), waarvan de grootte vooralsnog niet bekend is. Uit bovengenoemde bepaling blijkt echter in het geheel niet, wat aftrekken is; het is dus geen bepaling. Er wordt gezegd, dat aftrekken een bewerking is; dat heeft het gemeen met optellen, vermenigvuldigen, deelen enz. Daarna wordt verteld, *wat* men als uitkomst krijgt en dat nog niet eens direct; *hoe* de uitkomst verkregen wordt, wordt niet vermeld. De eigenlijke bewerking, juist datgene, waar het op aan komt, wordt niet gedefinieerd. Hoewel het natuurlijk zeer moeilijk is, dergelijke elementaire begrippen te definiëeren, dus eenvoudiger te zeggen, moet men bij vergelijking van de gebruikelijke definities van optellen en aftrekken, tot de conclusie komen, dat de eerste veel beter is dan de tweede. Het uitvoeren van de elementaire bewerking, dus het overgaan van een getal op een volgend, dat is werkelijk het optellen van dat getal en 1. Zoo gaat men bij optellen in de rij der natuurlijke getallen telkens verder. Bij aftrekken gaat men in de rij der natuurlijke getallen terug. Wanneer ik 50 met 1 verminder vraag ik me niet af, welk getal ik bij 1 moet optellen om 50 te krijgen. Ik tel gewoon 1 terug; in plaats van aftrekken zou men ook van aftellen kunnen spreken. Een beroep op de praktijk gaat niet op. Een winkelier zou, als hij geld terug geeft, niet aftrekken maar optellen. Indien men voor 24 cent koopt en men geeft een gulden, dan zal de winkelier zooveel bij de 24 cent tellen, tot hij de 100

cent bereikt heeft. Hij *telt* inderdaad *op* en voert een *andere* bewerking uit dan wij, wanneer we 24 van 100 aftrekken. De uitkomsten zijn dezelfde, maar de bewerkingen zijn niet dezelfde. In „Rekenboek voor de Hoogere Burgerschool" van P. Wijdenes en Dr. D. de Lange, welk boek eenvoudiger bedoeld is, staat het beter.

De hoeveelheid, die er overblijft, als van een hoeveelheid een deel wordt afgenomen, heet rest of verschil; het bepalen van het verschil heet aftrekken. Hier staat ten minste, dat er een deel van een hoeveelheid moet afgenomen worden en dat geeft het karakter van aftrekken aan.

Ook prof. Schuh definiëert in zijn „Leerboek der theoretische Rekenkunde" de aftrekking als omkeering van de optelling. Hij zegt, dat de aftrekking alleen dan mogelijk is, als het aftrektal grooter is dan de aftrekker. Zonder speciale invoering van het getal nul zou men dus van 5 wel 4 maar niet 5 kunnen aftrekken. Als ik van een hoeveelheid van 5 appels er een afneem en ik kijk, hoeveel er overblijven, kan ik dat beschouwen als een aftrekking. Zo ook wanneer er 2, 3 of 4 afgenomen worden. Waarom niet meer als er 5 afgenomen worden? Er blijft dan niets over; wil men daar een bepaald teeken, een bepaald getal, nul, voor invoeren, dan is dat weer iets anders. Wanneer ik de getallen 1, 2, 3, 4, 5 opschrijf, kan ik teruggaande 5, 4, 3 en 2 doorhalen, maar ik kan ook nog door de 1 een streep zetten. Als men de aftrekking als de omkeering van de optelling beschouwt, kan men inderdaad 5 niet met 5 verminderen, daar het, zonder speciale invoering van het getal 0, geen zin heeft 5 met niets te vermeerderen.

Prof. Schuh geeft in hetzelfde boek onder No. 45 een andere definitie van de som van twee getallen. Het getal, $a + b$, zegt hij, kan ook gedefiniëerd worden, als het getal, dat bij het tellen bereikt wordt, beginnend met het op a volgende getal en medetellend met een ander, die van 1 tot en met b telt.

Zou men niet een analoge definitie voor het getal $a - b$ kunnen geven? B.v.: Het getal $a - b$ is het getal, dat bereikt wordt, indien men beginnend met het aan a voorafgaand getal terug telt, totdat men b getallen genoemd heeft.

In deze definitie wordt het aftrekken, evenals de optelling teruggebracht tot tellen, alleen is het nu tellen in een andere richting, terugtellen, aftellen. J. Scheltens.

NASCHRIFT. Het groote voordeel van de gebruikelijke bepalingen van aftrekking en deeling is, dat zij voor alle getallengebieden gelden, zoodat de eigenschappen dezer bewerkingen als afgeleide eigenschappen kunnen worden beschouwd. J. H. S.

XLIV.

Mag ik hierdoor de medewerking van de Nederlandsche wiskundeleeraren inroepen, opdat in het vervolg door eind-examinandi, aankomende Delftsche studenten e.d. [1])

1°. vergelijkingen als sin $x = 0$ niet meer worden opgelost in een der vormen

a) $x = 0$

b) $x = n \,.\, 180°$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

c) $x = 0° \pm n \,.\, 180°$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

inplaats van b.v.

d) $x = \pm n \,.\, 180°$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

of, beter nog

e) $x = n \,.\, 180°$ (n geheel)

d.w.z. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$ enz.;

2°. vergelijkingen als cos $x = \frac{1}{2}$ niet meer worden opgelost in den vorm van

$x = 60° + n \,.\, 360°$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,

in plaats van

$x = \pm 60° + n \,.\, 360°$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

3°. ongelijkheden als

$x^2 < 1$ [2]) resp. $x^2 > 1$

niet meer worden opgelost in een der vormen:

a) $x < 1$, resp. $x > 1$,

b) $\pm x < 1$, resp. $\pm x > 1$,

c) $x < \pm 1$, resp. $x > \pm 1$,

d) $x < |1|$, resp. $x > |1|$,

e)[2]) $-1 < x < 1$, resp. $-1 > x > 1$;

f) $\left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -1 \end{array}\right\}$, resp. $\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right\}$;

in plaats van b.v.

[1]) *Alle* bovenvermelde fouten werden (de meeste zelfs zeer veelvuldig) door aankomende Delftsche studenten gemaakt.

[2]) Bij *e*) is natuurlijk de oplossing der *eerste* ongelijkheid wel correct; die der tweede niet.

g) $-1 < x < 1$ [3]), resp. *hetzij* $x > 1$, *hetzij* $x < -1$;

4°. de woorden symmetrisch en asymptoot niet meer geschreven worden in een der vormen:

a) sijmmetrisch

b) symetrisch,

resp. *a*) assymptoot,

b) asijmptoot,

c) asymptot,

d) assyntoot,

e) assentoot;

5°. niet slechts de eerste drie, doch *alle* Grieksche letters gekend en behoorlijk geschreven kunnen worden;

6°. twee breuken *tot* een gemeenschappelijken noemer herleid en niet meer *„onder* denzelfden noemer *gebracht”* worden (Hoe zou dat moeten geschieden?);

7°. het maximum van een *functie* bepaald wordt, of het *hoogste* punt van een kromme, doch niet het maximum van een kromme, of het hoogste punt van een functie;

8°. t.g.t. opgemerkt wordt, dat een punt op een kromme ligt, of dat de *coördinaten* van het punt aan de *vergelijking* van de kromme voldoen [4]), maar niet dat een punt aan een kromme voldoet, noch dat een vergelijking door een punt gaat, en dat evenmin een snijpunt van twee vergelijkingen, noch ook een gemeenschappelijke oplossing van twee rechte lijnen bepaald worden;

9°. een uitdrukking als b.v. $\sin\alpha + \sin\beta$ niet meer „logarithmisch gemaakt”, doch, in overeenstemming met de in de eerste klasse geleerde terminologie, *in factoren ontbonden wordt.*

---

[3]) D.w.z. x voldoet *gelijktijdig* aan de betrekkingen $-1 < x$ *en* $x < 1$. Het verdient opmerking, dat ook een te formeel gebruik van de woordjes „en” en „of” tot fouten aanleiding kan geven. Het is b.v. juist te zeggen: als $x^2 < 1$ resp. $x^2 > 1$, dan is $-1 < x$ *en* $x < 1$ resp. $-1 > x$ *of* $x > 1$, maar niet: x^2 is kleiner dan 1 *als* $-1 < x$ *en als* $x < 1$, doch weer wel: aan de ongelijkheid $x^2 > 1$ voldoen alle x waarvoor $-1 > x$ *en alle* x waarvoor $x > 1$ is.

[4]) Ook overigens wordt het woord „voldoen” veel misbruikt. B.v. zegt men „de oorsprong voldoet”; „de hyperbool voldoet niet”, (analoog met „dit scheerapparaat voldoet niet”), zonder te vermelden, waaraan al dan niet voldaan wordt.

Mag ik hier nog enkele andere vragen aan toevoegen?

I. Waarom gebruiken zoo vele leerlingen (en leeraren!) de uitdrukking „inliggen tusschen" in plaats van „liggen tusschen". Wellicht om de vraag „Waar ligt A?" met het mogelijke antwoord „Tusschen B en C in" (waar het overbodige „in" ook al niet fraai is) te kunnen vervangen door „Waar ligt A *in*?" met het antwoord „Tusschen B en C"? Men zou zoo ook kunnen zeggen: „inliggen in bed", „opliggen op een divan", „opvliegen boven de hei", „een boek in de kast inleggen".

Een student schreef: „sin x schommelt *in* tusschen -1 en $+1$".

II. Wordt de geringe moeilijkheid, uit te leggen dat de letter b in een quadratischen vorm niet den coefficient van x, maar den halven coefficient van x voorstelt, niet ruimschoots vergoed door het voordeel een aantal onoverzichtelijke getallenfactoren kwijt te raken, zoodat het reeds op de middelbare school aanbeveling zou verdienen, zulk een quadratischen vorm door $ax^2 + 2bx + c$ in plaats van door $ax^2 + bx + c$ voor te stellen?

D. van Dantzig.

NASCHRIFT. Ik geloof, dat de leeraren in het algemeen hun best wel doen. Of het hun gelukken zal, Neerlands jeugd tot zuiver schrijven te bewegen, betwijfel ik. De minachting voor de eigen taal lijkt mij inhaerent aan den Nederlandschen volksaard, het zijn waarlijk niet alleen schoolkinderen, die fouten schrijven [5]). Mijn jarenlange strijd tegen spellingen als hypot*h*enusa en para*lell*ogram heeft mij de overtuiging geschonken, dat ik tegen mij onbekende mystieke machten vecht; de leerlingen zien bovenstaande woorden nooit verkeerd gespeld, maar doen het „vanzelf" fout. Onder deze omstandigheden schijnt het mij toe, dat eene campagne voor het juist gebruiken van „en" en „of" weinig kans op succes heeft. Het komt mij voor, dat men bij het formuleeren van betrekkingen, zooals Prof. Van Dantzig in noot 3 bedoelt, niet te karig met woorden moet zijn. In die richting zoek ik de oplossing van deze en dergelijke moeilijkheden.

J. H. S.

---

[5]) Zij, wier fouten in de spelling van vreemde woorden uit onkunde voortkomen, kunnen veel nut hebben van het pas verschenen werkje van Dr. E. J. Dijksterhuis, Vreemde woorden in de wiskunde.

CONGRUENTIEEIGENSCHAPPEN IN DE STEREOMETRIE

DOOR

J. H. SCHOGT.

Een tiental jaren geleden heb ik in mijne „Beginselen der Vlakke Meetkunde" [1]) getracht, belangstelling te wekken voor eene behandeling der vlakke meetkunde, waarbij de eigenschappen van congruentie, die niet afhangen van het axioma van Euclides, vooraf gaan aan de behandeling der evenwijdigheid. Geslaagd mag men deze poging zeker niet noemen, maar het lijkt mij toch wel van eenig belang voor degenen, die hunne meetkundige studie in de richting der niet-euclidische meetkunde voortzetten, te weten, welke stellingen de meetkunde van Euclides en die van Lobatchevskij gemeenschappelijk hebben. Daarom laat ik hier een hoofdstuk der stereometrie in analoge behandeling volgen. Deze wijze van behandeling heeft bovendien het voordeel, dat de punten van overeenkomst en verschil tusschen planimetrie en stereometrie duidelijker in het oog springen.

Ter vermijding van wijdloopigheid zal ik mij hier en daar verwijzing naar mijne „Beginselen der Vlakke Meetkunde" veroorloven. De talrijke verbeteringen, die dit werk behoeft, zal ik onaangebracht laten, op ééne uitzondering na, zonder welke de vergelijking van planimetrie en stereometrie niet mogelijk is. Het betreft de volgorde der stellingen in het hoofdstuk congruentie van driehoeken (23 tot en met 32). Deze kan aldus zijn:

Stelling 23. Congruentiegeval Z.H.Z.
Stelling 24. „ H.Z.H.
Stelling 31. „ Z.Z.Z.
Stelling 25. Als van een driehoek twee zijden congruent zijn, zijn de hoeken tegenover die zijden congruent.

---

[1]) Groningen, P. Noordhoff, 1929.

Stelling 26. Het omgekeerde van stelling 25.[1])

Stelling 29. Een buitenhoek van een driehoek is grooter dan elk der niet-aanliggende binnenhoeken.

Stelling 30. Congruentiegeval Z.H.H.

Stelling 32. „ Z.Z.H.

Aan de behandeling der congruentie gaat vooraf een hoofdstuk over de eigenschappen van ligging, waarin men kennis maakt met begrippen als lijnstuk, halve lijn, half vlak, hoek, tweevlakshoek, drievlakshoek, viervlak, pyramide, e. d., bij welker definitie noch congruentie, noch evenwijdigheid gebruikt worden. Ter wille van de verwijzing worden hier de axiomata en stellingen van dit hoofdstuk vermeld.

Axiomata. I. Bij elke twee punten behoort ééne rechte lijn, waarop die punten liggen.

II. Bij elke drie punten behoort ten minste één plat vlak waarop die punten liggen; bij elke drie niet collineaire punten behoort ten hoogste één plat vlak, waarop die punten liggen.

III. Elke rechte lijn, waarvan twee punten in één plat vlak liggen, ligt in dat platte vlak.

IV. Twee platte vlakken, die een punt gemeen hebben, hebben een tweede punt gemeen.

V. Bij iedere rechte lijn en bij ieder plat vlak kan ten minste één punt worden aangewezen, dat er buiten ligt.

Stellingen. 1. Bij eene rechte lijn en een punt buiten die rechte lijn behoort één plat vlak, waarop beide liggen.

2. Bij elke twee rechte lijnen, die een punt gemeen hebben, behoort één plat vlak, dat ze bevat.

3. Als twee platte vlakken een punt gemeen hebben, hebben zij eene rechte lijn gemeen, die door dat punt gaat.

4. Er bestaan niet-coplanaire (z.g. kruisende) lijnen.

5. Kruisende lijnen hebben geen punt gemeen.

Axiomata. VI. Een punt A eener rechte lijn verdeelt de overige punten dier rechte lijn in twee groepen, zoodat A niet ligt tusschen

---

[1]) De stellingen 27 en 28 omtrent een gelijkzijdigen driehoek zijn eigenlijk misplaatst, daar de existentie van gelijkzijdige driehoeken niet gebaseerd kan worden op axiomata van congruentie. Dit doet hier niet ter zake.

twee punten eener zelfde groep, maar wel tusschen elke twee punten, die tot verschillende groepen behooren.

VII. Eene rechte lijn XY in een plat vlak verdeelt de niet op XY gelegen punten daarvan in twee verzamelingen, zoodat twee punten eener zelfde verzameling grenspunten zijn van een lijnstuk, waarop geen punt van XY ligt, maar twee punten van verschillende verzamelingen grenspunten zijn van een lijnstuk, dat een punt met XY gemeen heeft.

Stelling 6. Een vlak α verdeelt de niet daarin gelegen punten in twee verzamelingen, zoodat twee punten eener zelfde verzameling grenspunten zijn van een lijnstuk, dat geen punt van α bevat, terwijl twee punten van verschillende verzamelingen grenspunten zijn van een lijnstuk, dat een punt met α gemeen heeft.

A. Congruentie van lijnstukken.

§ 1. Grondbegrip: Congruentie van lijnstukken.

Axiomata. VIII. Elk lijnstuk is congruent met zichzelf.

IX. De congruentie van lijnstukken is transitief.

X. Op elke halve lijn is één enkel punt, dat met het grenspunt der halve lijn een lijnstuk begrenst, dat congruent is met een gegeven lijnstuk. (De axiomata IX en X, hoewel gelijkluidend met axiomata der vlakke meetkunde, hebben uitgebreider inhoud, daar de gegevens niet coplanair behoeven te zijn).

XI. De sommen, verkregen door optelling van congruente lijnstukken bij congruente lijnstukken, zijn congruent.

B. Congruentie van hoeken.

§ 2. Grondbegrip: Congruentie van hoeken.

Axiomata. XII. Elke hoek is congruent met zichzelf.

XIII. De congruentie van hoeken is transitief.

XIV. Als de uitspringende hoeken ABC en DEF congruent zijn, zijn de inspringende het ook, en omgekeerd.

XV. Alle gestrekte hoeken zijn congruent.

XVI. In elk half vlak is eene enkele halve lijn, die haar eindpunt heeft in een bepaald punt der grenslijn, en die met eene bepaalde der halve lijnen, waarin dat punt die grenslijn verdeelt, een uitsprin-

genden hoek vormt, die congruent is met een gegeven uitspringenden hoek.

XVII. De sommen, die men verkrijgt door optelling van congruente hoeken bij congruente hoeken, zijn congruent.

C. Congruentie van driehoeken.

§ 3. Axiomata XVIII. Is $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, dan is ook $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

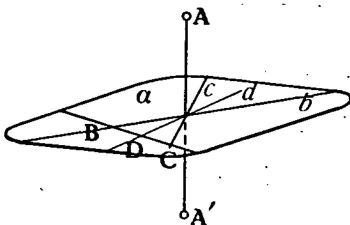
XIX. Is $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ en ook $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan is $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Hieruit worden op de gebruikelijke wijze de gevallen van congruentie van driehoeken afgeleid; deze gelden nu echter ook voor niet coplanaire driehoeken. Voorts worden de bekende ongelijkheidsstellingen in driehoeken afgeleid, welke dan eveneens voor niet coplanaire driehoeken geldigheid verkregen hebben.

Loodrechte stand van lijn en vlak.

§ 4. Zij a eene lijn en P een punt daarop, door a kan men op grond van ax. V verschillende vlakken brengen, en in elk daarvan gaat eene loodlijn door P op a. In een punt kunnen dus meerdere lijnen de lijn a loodrecht snijden.

Stelling 7. Als eene rechte lijn twee snijdende lijnen van een plat vlak loodrecht snijdt, snijdt zij ook loodrecht elke rechte lijn door het snijpunt in dat vlak.



Onderstelde: a loodrecht op b en op c, b en c in α, d in α; a, b en c door P.

Gestelde. a snijdt d loodrecht.

Bewijs. Op het verlengde van $\overline{AP}$ is volgens axioma X een punt A′ zoodat $\overline{PA'} \cong \overline{AP}$. Nu neemt men op b een punt B en op c een punt C, zoodat BC d in D snijdt. Men verbindt B, C en D met A en met A′. Nu bewijst men gemakkelijk achtereenvolgens de congruentie der volgende paren driehoeken:

APB en A′PB
APC en A′PC
ABC en A′BC
ABD en A′BD
APD en A′PD

zoodat de hoeken APD en A′PD congruent zijn. Daar zij nevenhoeken zijn, zijn zij recht, m.a.w. *a* snijdt *d* loodrecht.

Stelling 7a. Als eene lijn twee lijnen van een vlak loodrecht snijdt, snijdt zij dat vlak.

Bewijs. Dit volgt uit de stelling der vlakke meetkunde, dat in een vlak niet meer dan eene loodlijn door een punt op eene lijn gaat.

Bepaling. Eene lijn, die een vlak snijdt en de lijnen in het vlak door het snijpunt loodrecht snijdt, heet eene loodlijn op het vlak; het vlak heet een loodvlak op de lijn, het snijpunt heet voetpunt.

Stelling 8. Alle loodlijnen in een punt op eene lijn zijn coplanair.

Ondersteld e. *b*, *c* en *d* gaan door P en zijn loodrecht op *a*. *b* en *c* liggen in α.

Gestelde. *d* ligt in α.

Bewijs. Volgens stelling 7a ligt *a* niet in α; het vlak β dat bepaald is door *a* en *d* is dus van α verschillend. Het heeft met α een punt P gemeen, dus eene lijn *d′* door P (st. 3). Was *d′* verschillend van *d*, dan sneed in het vlak β *d* *a* in P loodrecht (ond.) en *d′* *a* loodrecht (st. 7); deze dingen zijn onvereenigbaar volgens eene planimetrische stelling, dus moeten *d* en *d′* samenvallen, met andere woorden *d* ligt in α.

§ 5. Stelling 9. Door een punt eener lijn gaat één loodvlak op die lijn.

Ondersteld e. Het punt P ligt op de lijn *a*.

Gestelde. Er is een enkel vlak door P loodrecht op *a*.

Bewijs. Door de lijn *a* kan men twee vlakken brengen; in het eene brengt men eene loodlijn *b* door P op *a*, in het andere eene loodlijn *c* door P op *a*. De lijnen *b* en *c* bepalen volgens stelling 2 een vlak, en dit staat volgens stelling 7 loodrecht op *a*. Dat door P geen tweede vlak loodrecht op *a* mogelijk is, wordt gemakkelijk afgeleid uit stelling 8.

Stelling 10. Door een punt buiten eene lijn gaat één loodvlak op die lijn.

Onderstelde. Het punt P ligt buiten de lijn *a*.

Gestelde. Door P gaat een enkel loodvlak op *a*.

Bewijs. Volgens stelling 1 bepalen P en *a* een vlak, hierin gaat eene loodlijn *b* door P op *a*; zij Q het voetpunt. Uit axioma V volgt het bestaan van een tweede vlak door *a*; hierin ligt eene loodlijn *c* door Q op *a*. De lijnen *b* en *c* bepalen volgens stelling 2 een vlak, en dit is volgens st. 7 loodrecht op *a*, het gaat tevens door P. Dat er geen tweede loodvlak door P op *a* mogelijk is, blijkt als volgt: zulk een tweede vlak zou volgens stelling 9 niet door Q kunnen gaan, en zou dus *a* in een ander punt Q′ moeten snijden. In het vlak PQQ′ zouden dan twee loodlijnen door P op *a* mogelijk zijn, hetgeen in strijd is met de vlakke meetkunde.

§ 6. Stelling 11. Door een punt van een vlak gaat éene loodlijn op dat vlak.

Onderstelde. Het punt P ligt in het vlak α.

Gestelde. Door P gaat eene enkele loodlijn op α.

Bewijs. Door het punt P gaan twee lijnen *b* en *c* in α, volgens stelling 9 gaat door P een loodvlak β op *b* en een loodvlak γ op *c*. Deze hebben het punt P gemeen, dus volgens stelling 3 eene lijn *l* door P. Nu staat *b* loodrecht op β, dus snijdt *l* loodrecht, evenzoo staat *c* loodrecht op γ, dus snijdt *l* loodrecht. *l* snijdt dus loodrecht de beide snijdende lijnen *b* en *c* van α, dus *l* staat loodrecht op α. Dat er geen tweede loodlijn door P op α mogelijk is, kan men als volgt inzien: indien er eene tweede loodlijn *l′* was, zouden *l* en *l′* een vlak bepalen, dat met α het punt P dus eene lijn *d* door P gemeen had. In dit vlak gingen dan door P twee loodlijnen *l* en *l′* op *d*, hetgeen in strijd is met de vlakke meetkunde.

Stelling 12. Door een punt buiten een vlak gaat eene loodlijn op dat vlak.

Onderstelde. Het punt P ligt buiten het vlak α.

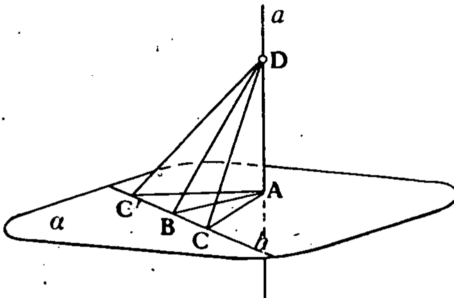
Gestelde. Door P gaat eene enkele loodlijn op α.

Bewijs. Zij AB eene lijn in α, volgens stelling 1 is er een vlak PAB, daarin is eene loodlijn PQ op AB, met voetpunt Q; in α is eene loodlijn QR op AB, en in het vlak PQR eene loodlijn PS op QR, met voetpunt S. Nu is er volgens axioma X op het verlengde van $\overline{PS}$ een punt P′, zoodat $\overline{PS} \cong \overline{SP'}$. Trek QP′. Daar AB loodrecht staat op QP en QS is volgens stelling 7 AB loodrecht op QP′. Nu bewijst men achtereenvolgens de congruentie van de volgende paren driehoeken: PSQ en P′SQ
PQA en P′QA
PSA en P′SA
hieruit volgt de congruentie der hoeken PSA en P′SA, zoodat PS SA loodrecht snijdt; tevens snijdt zij QS loodrecht, dus volgens stelling 7 staat PS loodrecht op α. Dat er geen tweede loodlijn PS′ door P op α gaat blijkt als volgt: in het vlak PSS′ zouden twee loodlijnen PS en PS′ door P op SS′ gaan, hetgeen in strijd is met de vlakke meetkunde.

Opmerking. Als het punt S met Q samenvalt, wordt het bewijs iets eenvoudiger.

Bepaling. Onder den afstand van een punt tot een vlak verstaat men den afstand van dat punt tot het voetpunt der loodlijn door dat punt op dat vlak.

§ 7. Stelling 13. Als éénе van twee kruisende lijnen ligt in een vlak loodrecht op de tweede, dan ligt de tweede in een vlak loodrecht op de eerste.



Onderstelde. De lijn a staat loodrecht op het vlak α, de lijn b ligt in het vlak α.

Gestelde. Er is een vlak, dat door a gaat en loodrecht op b staat.

Bewijs. a staat loodrecht op α, dus snijdt dit vlak volgens stelling 7a, noem het snijpunt A; trek in α AB loodrecht op b (voetpunt B). Neem een punt C op b; op het verlengde van $\overline{CB}$ is volgens axioma X een punt C′, zoo, dat

$\overline{BC'} \cong \overline{BC}$; verder zij D een punt op *a*. Nu bewijst men achtereenvolgens de congruentie van de volgende paren driehoeken:

ABC en ABC′
DAC en DAC′
DBC en DBC′

Hieruit volgt de congruentie van de hoeken DBC en DBC′, deze zijn dus recht en *b* snijdt BD loodrecht; tevens snijdt *b* BA loodrecht, dus *b* staat loodrecht op het vlak BDA. En *a* ligt in dit vlak, daar zij er de punten D en A mede gemeen heeft. Dat er geen tweede vlak door *a* loodrecht op *b* gaat is een gevolg van stelling 10.

Bepaling. Twee kruisende lijnen, waarvan elk ligt in een vlak loodrecht op de andere, heeten loodrecht kruisende lijnen.

Stelling 13a. Als eene lijn twee snijdende lijnen van een vlak loodrecht kruist, staat zij loodrecht op dat vlak.

Ondersteld. *a* kruist *b* en *c* loodrecht; *b* snijdt *c* in P, *b* en *c* liggen in α.

Gestelde. *a* staat loodrecht op α.

Bewijs. Volgens het ondersteld is er een vlak door *b* loodrecht op *a*; hierin ligt P; evenzoo is er een vlak door *c* loodrecht op *a*, ook hierin ligt P. Daar er volgens stelling 10 door P niet meer dan een loodvlak op *a* gaat, vallen deze vlakken samen, zoodat het vlak door *b* en *c*, dat is α, loodrecht *a* staat.

Stelling 13b. Als eene lijn van twee snijdende lijnen van een vlak de eene loodrecht kruist en de andere loodrecht snijdt, staat zij loodrecht op dat vlak.

Ondersteld. *a* snijdt *b* loodrecht in Q, *b* snijdt *c* in P, *a* kruist *c* loodrecht, *b* en *c* liggen in α.

Gestelde. *a* staat loodrecht op α.

Bewijs. *b* ligt volgens stelling 8 in het loodvlak door Q op *a*, dit bevat dan ook P en is het loodvlak door P op *a*. Het vlak door *c* loodrecht op *a* valt hiermee volgens stelling 10 samen, dus *a* staat loodrecht op α.

Stelling 13c. Als eene lijn twee elkaar snijdende lijnen van een vlak loodrecht snijdt of kruist, staat zij loodrecht op dat vlak.

Dit is eene samenvatting van de stellingen 7, 13a en 13b.

Met de zegswijze „*a* staat loodrecht op *b*” bedoelt men: *a* snijdt of kruist *b* loodrecht.

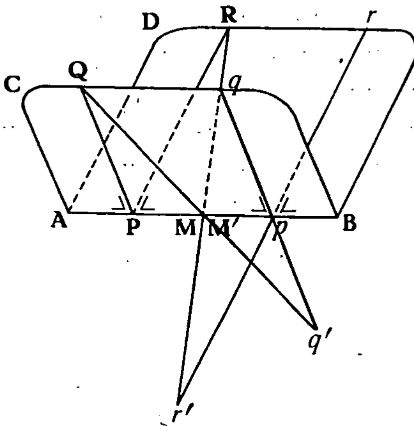
D. Congruentie van tweevlakshoeken.

§ 8. Bepaling. Een standvlak van een tweevlakshoek is een vlak loodrecht op de ribbe van dien tweevlakshoek. Een standhoek van een tweevlakshoek is de binnen dien tweevlakshoek gelegen hoek, die deel uitmaakt van een standvlak.

De beenen van een standhoek zijn dus loodlijnen op de ribbe van den tweevlakshoek, gelegen in de zijvlakken; men bewijst gemakkelijk, dat iedere hoek, waarvan de beenen in de zijvlakken liggen en loodrecht op de ribbe staan en die binnen den tweevlakshoek ligt, een standhoek is.

Een standhoek van een tweevlakshoek is uitspringend, gestrekt of inspringend, naar gelang dit het geval is met den tweevlakshoek zelf.

§ 9. Stelling 14. Twee standhoeken van eenzelfden tweevlakshoek zijn congruent.



Onderstelde. PQ staat loodrecht op AB in vlak ABC; PR staat loodrecht op AB in vlak ABD; *pq* staat loodrecht op AB in vlak ABC; *pr* staat loodrecht op AB in vlak ABD.

Gestelde. De hoeken QPR en *qpr* zijn congruent.

Bewijs. Wij nemen de punten Q, R, *q* en *r* zoodanig, dat $\overline{PQ} \cong \overline{pq}$ en $\overline{PR} \cong \overline{pr}$. Volgens axioma X ligt op het verlengde van $\overline{qp}$ een punt q' zoodat $\overline{pq'} \cong \overline{pq}$, en op het verlengde van $\overline{rp}$ een punt r' zoodat $\overline{pr'} \cong \overline{pr}$. De lijn Qq' in vlak ABC snijdt AB in M, de lijn Rr' in vlak ABD snijdt AB in M′. Nu volgt eerst de congruentie van de paren driehoeken QPM en $q'pM$,

RPM′ en $r'pM'$.

Hieruit leidt men af, dat de punten M en M′ beide het midden

van $\overline{Pp}$ zijn, en dus samenvallen; met behulp daarvan bewijst men weer de congruentie van $\overline{QM}$ en $\overline{q'M}$, van $\overline{RM}$ en $\overline{r'M}$. Dan volgt de congruentie van de driehoeken QMR en $q'Mr'$, waaruit volgt dat $\overline{QR} \backsimeq \overline{q'r'}$. Daaruit volgt de congruentie van de driehoeken PQR en $pq'r'$, zoodat de hoeken QPR en $q'pr'$ congruent zijn.

Daar de hoeken $q'pr'$ en qpr overstaande hoeken zijn, is het gestelde bewezen.

Bepaling. Onder *den* standhoek van een tweevlakshoek verstaat men een hoek, die congruent is met elken standhoek van dien tweevlakshoek.

§ 10. Bepaling: Men definieert de congruentie van tweevlakshoeken als congruentie der standhoeken. Hieruit volgen direct de volgende stellingen:

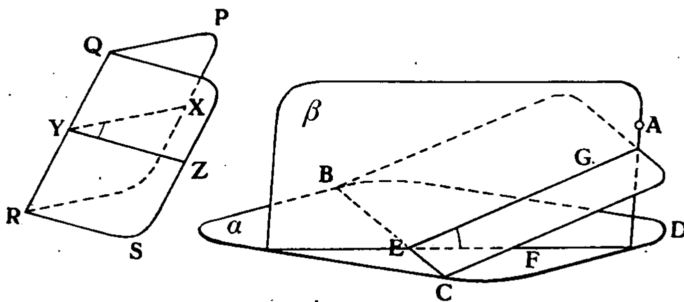
Stelling 15. Elke tweevlakshoek is congruent met zichzelf.

Stelling 16. De congruentie van tweevlakshoeken is transitief.

Stelling 17. Als de uitspringende tweevlakshoeken (A, BC, D) en (P, QR, S) congruent zijn, zijn de inspringende het ook.

Stelling 18. Alle gestrekte tweevlakshoeken zijn congruent.

Stelling 19. In iedere halve ruimte is een enkel half vlak, dat zijne grens heeft in eene bepaalde lijn van het grensvlak dier halve ruimte, en dat met een bepaald der halve vlakken, waarin die lijn dat grondvlak verdeelt, een tweevlakshoek begrenst, die congruent is met een gegeven uitspringenden tweevlakshoek.



Bewijs. Zij XYZ een standhoek van den gegeven uitspringenden tweevlakshoek (P, QR, S), en (α, A) de gegeven halve ruimte, terwijl het grensvlak α door BC verdeeld wordt in twee halve vlakken, waarvan (BC, D) wordt bedoeld.

Volgens stelling 10 gaat door A een loodvlak β op BC, dit snijdt volgens stelling 7a BC in een punt E; β heeft met α het punt E gemeen, dus volgens stelling 3 eene lijn door E; zij F een punt daarvan in (BC, D). Volgens axioma XVI is in het halve vlak (EF, A) eene halve lijn EG, zoodat hoek GEF congruent is met hoek XYZ; de lijnen BC en EG bepalen volgens stelling 2 een vlak γ, waarvan het halve vlak (BC, G) met (BC, D) een tweevlakshoek (G, BC, D) begrenst, die congruent is met (P, QR, S); immers standhoek GEF van den eersten is congruent met standhoek XYZ van den tweeden.

Dat er geen tweede half vlak is, dat aan de vraag voldoet, volgt hieruit, dat dit met β eene doorsnedė EG′ zou hebben, zoodat de hoeken G′EF en GEF congruent waren, hetgeen in strijd is met axioma XVI.

§ 11. Bepaling. Men noemt een tweevlakshoek (A, BC, D) de som van twee tweevlakshoeken (E, FG, H) en (K, LM, N) als de eerste door een vlak door BC in twee tweevlakshoeken verdeeld kan worden, waarvan er een congruent is met (E, FG, H) en de andere met (K, LM, N).

Stelling 20. De standhoek van de som van twee tweevlakshoeken is de som van de standhoeken der deelen.

Stelling 21. De sommen, verkregen door bij congruente tweevlakshoeken congruente tweevlakshoeken op te tellen, zijn congruent.

Vergelijkt men de stellingen 15 t/m 19 en 21 met de axiomata XII t/m XVII, dan springt de analogie in het oog. Men kan dus voor de tweevlakshoeken eene theorie opbouwen, die overeenkomt met de theorie der hoeken in de vlakke meetkunde. Overstaande tweevlakshoeken, neventweevlakshoeken, complement, supplement enz. kunnen op overeenkomstige wijze als in de vlakke meetkunde worden gedefinieerd, en overeenkomstige stellingen op overeenkomstige wijze bewezen.

Onderling loodrechte vlakken.

§ 12. Evenals in de vlakke meetkunde voor hoeken, geldt in de stereometrie dat als een der tweevlakshoeken, ontstaande bij de snijding van twee vlakken recht is, de overige ook recht zijn.

Bepaling. Twee vlakken, die rechte tweevlakshoeken vormen, heeten onderling loodrecht, elk der vlakken heet loodrecht op het andere of een loodvlak op het andere.

Stelling 22. Elk vlak, gaande door eene loodlijn op een tweede vlak, is zelf loodrecht op dat vlak.

Ondersteld. l in α en loodrecht op β.

Gestelde. α loodrecht op β.

Bewijs. Daar l loodrecht op β is, snijdt l β in een punt P, volgens stelling 7a; daar l in α ligt, ligt ook P in α, en P ligt in β, dus volgens stelling 3 hebben α en β eene lijn d gemeen, die door P gaat. In het vlak β gaat door P eene loodlijn m op d. Nu staat l loodrecht op β, dus op d, en m staat loodrecht op d, dus de hoek van l en m is een standhoek van den tweevlakshoek van α en β. Nu staat l loodrecht op β dus op m, de hoek van l en m is dus recht, m. a. w. α is loodrecht op β.

Deze stelling kan ook aldus worden geformuleerd:

Stelling 22a. Elk vlak, loodrecht op eene in een ander vlak gelegen lijn, is loodrecht op dat vlak.

§ 13. Stelling 23. Eene lijn, die in een van twee onderling loodrechte vlakken loodrecht op de doorsnede getrokken is, is loodrecht op het tweede vlak.

Onderstelde. α is loodrecht op β; d in α en in β; l loodrecht op d; l in α.

Gestelde. l loodrecht op β.

Bewijs. Zij P het voetpunt van l op d; in β gaat eene loodlijn m door P op d. Nu zijn l en m beenen van een standhoek, en α is loodrecht op β, dus die standhoek is recht en l staat loodrecht op m. Ondersteld is, dat l loodrecht staat op d, dus volgens stelling 7 is l loodrecht op β.

Stelling 24. Eene rechte lijn, die door een punt van een van twee onderling loodrechte vlakken loodrecht op het andere is getrokken, ligt in het eerste.

Onderstelde. α is loodrecht op β; P in α; l door P; l loodrecht op β.

Gestelde. l ligt in α.

Bewijs. Door P gaat in α eene lijn l' loodrecht op de doorsnede d; volgens stelling 23 is dan l' loodrecht op β. Was nu l' van l ver-

schillend, dan gingen door P twee loodlijnen op β, hetgeen in strijd is met stelling 12. Dus valt l met l' samen, en ligt dus in α.

Stelling 25. Als twee elkaar snijdende vlakken beide loodrecht zijn op een derde, is hunne doorsnede loodrecht op het derde.

Ondersteld. α en β door d; α en β loodrecht op γ.

Gestelde. d loodrecht op γ.

Bewijs. Zij P een punt van d; de loodlijn uit P op γ (st. 12) ligt volgens stelling 24 in α en in β, valt dus met d samen, m.a.w. d is loodrecht op γ.

§ 14. Stelling 26. Door eene lijn, die niet loodrecht op een vlak staat, gaat een enkel vlak loodrecht op dat vlak.

Ondersteld. l is niet loodrecht op α.

Gestelde. Er is een enkel vlak β door l loodrecht op α.

Bewijs. Door een punt P van l gaat eene loodlijn PQ op α (st. 11 of 12); l en PQ bepalen een vlak β, en dit is loodrecht op α volgens stelling 22.

Er is geen ander vlak door l loodrecht op α, want zulk een vlak zou PQ moeten bevatten (st. 23 of 24) en er is slechts een vlak, dat l en PQ bevat, immers daar volgens het ondersteld l niet loodrecht op α staat, verschilt l van PQ (st. 12 of 13), volgens stelling 2 is β dus ondubbelzinnig bepaald.

E. Congruentie van drievlakshoeken.

§ 15. Wanneer men de halve lijnen beschouwt met gemeenschappelijk eindpunt in het hoekpunt van een drievlakshoek, telkens loodrecht op eene zijde, en ten opzichte van die zijde in de andere halve ruimte dan de derde ribbe, dan zijn deze halve lijnen niet coplanair. Zij namelijk

PA′ loodrecht op PBC
PB′ loodrecht op PCA
PC′ loodrecht op PAB.

Was nu PA′B′C′ een vlak α, dan was volgens stelling 22 PBC loodrecht op α, evenzoo PCA, en dus volgens stelling 25 PC loodrecht op α, evenzoo PB en PA, hetgeen in strijd is met stelling 11.

Dus zijn de halve lijnen PA′, PB′ en PC′ niet coplanair; de drievlakshoek, die deze halve lijnen tot ribben heeft, heet de pooldrievlakshoek van PABC.

Voor het bewijs van de volgende stelling (27) gebruiken wij twee hulpstellingen:

I. Is hoek ABC stomp, dan liggen de beenen BA en BC aan verschillende kanten van het loodvlak α in B op AB.

Bewijs. Het vlak ABC heeft met α het punt B gemeen, dus eene rechte lijn *d* door B (st. 3); zij BD de halve lijn daarvan binnen den uitspringenden hoek ABC. Nu is hoek ABD recht en hoek ABC stomp (ond.), dus is hoek ABD een deel van hoek ABC, dus liggen de halve lijnen BA en BC aan verschillende kanten van BD, dus in verschillende halve ruimten ten opzichte van α.

II. Liggen de halve lijnen BA en BC ter weerszijden van het loodvlak α in B op BA, dan is de uitspringende hoek ABC stomp, of hoek ABC is gestrekt.

Bewijs. Het vlak ABC snijdt α volgens BD; nu is, daar de halve lijnen BA en BC ter weerszijden van BD liggen, hoek ABD een deel van hoek ABC, dus, daar hoek ABD recht is, is hoek ABC stomp of gestrekt.

Stelling 27. De betrekking tusschen een drievlakshoek en zijn pooldrievlakshoek is wederkeerig.

Onderstelde. PA′B′C′ is de pooldrievlakshoek van PABC.

Gestelde. PABC is de pooldrievlakshoek van PA′B′C′.

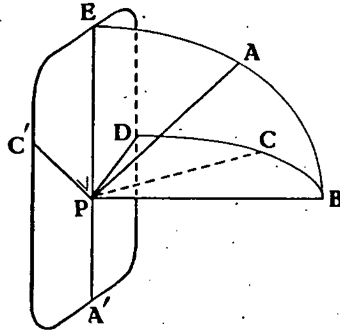
Bewijs. Volgens het onderstelde is PA′ loodrecht op PBC, dus op PC, evenzoo PB′ loodrecht op PC, dus volgens stelling 7 is PC loodrecht op vlak PA′B′. Daar de halve lijnen PC en PC′ ter weerszijden van het vlak PAB liggen (ond.), is hoek CPC′ stomp of gestrekt volgens hulpstelling II; is hij stomp dan liggen de halve lijnen PC en PC′ ook ter weerszijden van PA′B′ volgens hulpstelling I, is hij gestrekt, zoodat de halve lijnen elkanders verlengden zijn, dan spreekt dit vanzelf. Eene zelfde redeneering geldt voor de andere ribben; hiermede is de stelling bewezen.

Stelling 28. De zijden van den pooldrievlakshoek van een drievlakshoek zijn de supplementen van de hoeken van dien drievlakshoek.

Onderstelde. PA′B′C′ is de pooldrievlakshoek van PABC.

Gestelde. Hoek A′PC′ is het supplement van (A, PB, C), enz.

Bewijs. Uit het onderstelde volgt, dat PA′ en PC′ loodrecht op PB staan, dus hoek A′PC′ is een standvlak op de ribbe PB. Zij de doorsnede met PBC de lijn PD, die met PAB de lijn PE. Dan is



PA′ loodrecht op PBC dus PA′ loodrecht op PD,

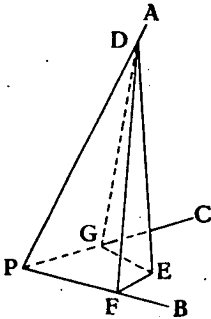
PC′ loodrecht op PAB dus PC′ loodrecht op PE.

Omdat de hoeken A′PE en C′PD stomp zijn, en de hoeken C′PE en A′PD recht, is de som van de hoeken A′PC′ en DPE congruent met een gestrekten hoek. Maar hoek DPE is een standhoek van den tweevlakshoek (A,PB,C); hiermede is de stelling bewezen.

Stelling 29. De hoeken van den pooldrievlakshoek van een drievlakshoek zijn de supplementen van de zijden van dien drievlakshoek.

Deze stelling volgt dadelijk uit de stellingen 27 en 28.

§ 16. Stelling 30. Als twee zijden en de ingesloten tweevlakshoek van een drievlakshoek congruent zijn met twee zijden en den ingesloten tweevlakshoek van den anderen drievlakshoek, dan zijn ook de derde zijden van deze drievlakshoeken congruent.



Onderstelde. Hoek APB is congruent met hoek A′P′B′, hoek BPC met hoek B′P′C′, tweevlakshoek (A,PB,C) met tweevlakshoek (A′,P′B′,C′).

Gestelde. Hoek APC is congruent met hoek A′P′C′.

Bewijs. Zij D een willekeurig punt van de ribbe PA; op de ribbe P′A′ ligt volgens axioma X een punt D′, zoodat $\overline{P'D'} \cong \overline{PD}$. Zij DE loodrecht op BPC, E in BPC, D′E′ loodrecht op B′P′C′, E′ in B′P′C′. Dan bestaat er volgens stelling 13 door DE een loodvlak DFE op PB en een loodvlak DGE op PC, evenzoo een loodvlak

D′F′E′ door D′E′ op P′B′ en een loodvlak D′G′E′ door D′E′ op P′C′. Nu bewijst men achtereenvolgens de congruentie van de volgende paren figuren:

driehoek DFP en driehoek D′F′P′,
driehoek DEF en driehoek D′E′F′,
vierhoek PFEG en vierhoek P′F′E′G′,
driehoek PDG en driehoek P′D′G′;

uit dit laatste volgt het gestelde.

Opmerking. Als de drievlakshoeken rechte elementen bevatten, wordt het bewijs eenigszins gewijzigd.

Stelling 31. Als de drie zijden van een drievlakshoek congruent zijn met die van een anderen, dan staan tegenover congruente zijden in die drievlakshoeken congruente tweevlakshoeken.

Het bewijs wordt geleverd met behulp van dezelfde driehoeken, als in het bewijs van stelling 30 hebben dienst gedaan.

§ 17. Bepaling. Men noemt twee drievlakshoeken congruent als de zijden van den eenen congruent zijn met die van den tweeden, en de hoeken evenzoo.

Een voorbeeld van congruente drievlakshoeken leveren twee overstaande drievlakshoeken.

De betrekking van congruentie van drievlakshoeken is transitief; dit volgt dadelijk uit de bepaling en uit de transitiviteit der congruentie van hoeken en van tweevlakshoeken.

Stelling 32. Twee drievlakshoeken zijn congruent als twee zijden en de ingesloten tweevlakshoek van den eenen drievlakshoek congruent zijn met twee zijden en den ingesloten tweevlakshoek van den anderen. (ZHZ).

Bewijs als in de vlakke meetkunde.

Stelling 33. Twee drievlakshoeken zijn congruent als eene zijde en de beide aanliggende tweevlakshoeken van den eenen congruent zijn met eene zijde en de beide aanliggende tweevlakshoeken van den anderen. (HZH).

Deze stelling kan worden bewezen als in de vlakke meetkunde, maar ook op de volgende wijze met behulp van den pooldrievlakshoek. Uit het onderstelde en de stellingen 28 en 29 volgt, dat de pooldrievlakshoeken der beide drievlakshoeken congruent zijn volgens stelling 32; daaruit kan weer met behulp van diezelfde stel-

PROSPECTUS

WIJDENES en BETH

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

VOOR GYMNASIA EN LYCEA

Klassen I—IV, N.S.A. deel I en II zonder de reeksen { **Vα en VIα, N.S.A. IIIα** / **Vβ en VIβ, N.S.A. III**

VOOR DE H. B. S.

Klassen I, II, III, deel I en II, voor IVB en VB deel III

I.	**Elfde druk.**	156 blz.	21 fig.	geb. ƒ 2,25.
II.	**Tiende druk.**	204 blz.	50 fig.	geb. ƒ 2,25.
III.	**Zevende druk.**	198 blz.	69 fig.	geb. ƒ 2,25.

De uitgever biedt hen, die de Nieuwe Schoolalgebra op hun school gebruiken of invoeren, voor klasse-gebruik aan een pres. ex. van Wijdenes:

12 WANDPLATEN MET GRAFIEKEN, groot 66 bij 56 cm, met zwarte figuren op groene ruiten, geplakt op carton, prijs .. ƒ 11.—

Verkleinde reproducties van de 12 wandplaten . . . . . . ƒ 0.40

Deze **onveranderde herdrukken** worden dit jaar niet aan alle leraren als pres. ex. gezonden; dit is het vorige jaar geschied.

Leraren, die een pres. ex. wensen, hetzij om hun eigen ex. te verversen, hetzij om ze na te gaan met het oog op invoering, kunnen gratis en franco een ex. bekomen; bij invoering tevens van de antwoorden.

De uitgewerkte logarithmenvraagstukken in 4 en in 5 dec. zijn niet in de handel, maar worden aan gebruikers op aanvraag gratis en franco toegezonden door P. Wijdenes, Jac. Obrechtstraat 88 Amsterdam Z.

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

INHOUD VAN DEEL I.

Elfde druk.

156 bladzijden; 21 figuren; geb. *f* 2,25.

INHOUD VAN DEEL II.

Tiende druk.

204 bladzijden; 50 figuren; geb. *f* 2,25.

INHOUD VAN DEEL III.

Zevende druk.

198 blz.; 69 fig.; geb. *f* 2,25.

DE NIEUWE SCHOOLALGEBRA EN HET PROGRAM 1937 VOOR DE H.B.S.

I. **Elfde druk.** 156 blz. 21 fig. geb. ƒ 2,25.
II. **Tiende druk.** 204 blz. 50 fig. geb. ƒ 2,25.
III. **Zevende druk.** 198 blz. 69 fig. geb. ƒ 2,25.

☞ **Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3, deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.**

Wijdenes en Van de Vliet Algebra voor de H.B.S. A in 4A en 5A

Het Koninklijk besluit van 27 Mei 1937 heeft slecht weinig verandering nodig gemaakt in de Nieuwe Schoolalgebra. Deel I kon onveranderd worden herdrukt; daarover hebben we dus niets te zeggen.

DEEL II.

De herziening van deel II en van deel III lag reeds klaar voor de herdruk, toen het nieuwe leerplan verscheen; het enige, wat we te doen hadden, was de volgorde hier en daar wat te wijzigen en den zetter daarvoor de nodige aanwijzingen te geven. Er waren hoofdstukken, die uit deel III moesten worden overgebracht naar deel II nl. de oneigenlijke machten, de logarithmen en de reeksen, enkele kleinere uit II naar III. De herhaling aan het eind van deel II werd verzet naar blz. 114 en volgende; deze is een behoorlijke afscheiding tussen de lineaire en kwadratische functies, vergelijkingen en ongelijkheden en de uit III overgehevelde leerstof. Aan het eind van deel II komt dan de vijfde herhaling.

Wezenlijke veranderingen in behandeling bracht de invoering van het nieuwe program niet mee, immers de Nieuwe Schoolalgebra behandelde reeds in aard en uitgebreidheid of beperktheid, wat in het Koninklijk besluit is neergelegd.

Wortels en oneigenlijke machten.

We verzoeken de collega's deel II blz. 50 en volgende op te slaan; de titel van het hoofdstuk is: *Vierkantswortels*. Voor hetgeen volgt op dit hoofdstuk (blz. 72—113) hebben we die alleen nodig; de meetkunde eist evenmin de hogere wortels; met de herhaling op blz. 69 hebben we ruimschoots voldaan aan de behoefte aan

„wortels"; de zeer grote beperking maakt tijd vrij voor betere dingen. „Waar de hogere wortels dan blijven?" Zie op blz. 127 de alinea, die begint met „Eigenschappen . . ."; die vier regels zeggen precies, wat onze bedoeling is en als men dan nog leest tot de vraagstukken op blz. 128, dan ziet men, hoe de hogere wortels en de oneigenlijke machten zijn teruggebracht tot een minimum, evenredig aan hun wel zeer kleine belang voor de wiskundige vorming; ook de vraagstukken zijn eenvoudig gehouden. Geeft § 60 genoeg of niet? Naar onze mening meer dan voldoende. De behandeling in § 55 van de oneigenlijke machten is veel verbeterd. Vroeger zei men (wij ook): „$\sqrt[3]{a^2}$ stellen we voor door $a^{2/3}$ en nu zullen we eens nagaan of de eigenschappen van de machten nog doorgaan". Dit blijkt dan inderdaad het geval te zijn. Wij hebben de zaak omgedraaid; zie de eerste alinea van § 55 en de dik gedrukte vragen met de antwoorden op blz. 124 en het cursief gedrukte onderaan. Deze manier is beter en eenvoudiger.

De splitsing in wat nodig is, dat is een behoorlijke techniek met vierkantswortels, en een klein beetje hogere wortels, tegelijk te behandelen met de oneigenlijke machten, zal blijken een grote verbetering te zijn. Zou men bij de vierkantswortels alles schrappen, wat weinig voorkomt, dan zou men kunnen volstaan met de helft van het aantal bladzijden, dat is overgebleven. Daar vaardigheid in het werken met vierkantswortels in elk geval geëist mag worden, hebben we niet nog meer besnoeid.

Logarithmen. De logarithmen zijn uit deel III naar deel II overgebracht; van wezenlijke verandering is geen sprake. Hier en daar is wat bekort; in het bijzonder in de paragrafen 69 en 70. De overdrijving in de logarithmenpuzzles, gevolg van jaren en jaren lang examineren, hebben we ingeperkt tot wat redelijk is; hetzelfde geldt voor de logarithmische en exponentiële vergelijkingen. Wat er overblijft is ruim voldoende; toegevoegd zijn slechts voorbeeld 9 van blz. 158 en de vraagstukken 18, 19 en 20 van blz. 159; deze zijn nuttig en nodig.

Over de vier decimalen alleen dit: we hebben naast de vier de vijf behouden, ten eerste omdat ook op andere scholen dan H.B.S. de Nieuwe Schoolalgebra gebruikt wordt en ten tweede, omdat zeker een deel van de leraren, zo niet een groot deel, bij de vijf decimalen blijft. Men zie verder een artikel in Euclides XIV, afl. 2/3, 1937/38.

Reeksen. Tweemaal staan de rekenkundige reeksen in het programma; voor de eerste ronde hebben we ons er afgemaakt met een halve bladzijde (8 onderaan en 9 bovenaan); dat is genoeg; § 71—74, zie blz. 161—171, geeft alles, wat nodig is; de omvang is twee bladzijden minder dan in de 5e druk van deel III.

Bij de behandeling van de meetkundige reeksen vonden wij het gewenst eerst de eindigende reeksen in enige bladzijden af te doen en daarna als inleiding tot de oneindige reeksen het begrip limiet van een variant aan te brengen. Dit laatste (blz. 178—181) met eenvoudige woorden, voorbeelden en grafieken en in een tiental vraagstukjes. Het misverstand van de leerlingen, dat limieten er alleen zijn voor $S = \frac{a}{1 - r}$ wordt daarmee uit de wereld geholpen. Op het laatst wordt dan na een terugblik de definitie gegeven (zie blz. 185). Wie hier ter plaatse meer aan limieten doet, doet o.i. verkeerd.

Als toepassing hebben we 4 bladzijden gewijd aan de samengestelde intrestrekening en nog 3½ bladzijde met vraagstukken. We weten, dat vele leraren een kreet van verluchting slaakten, toen ze ontwaarden, dat het Koninklijk besluit die door jarenlang examineren tot in het onzinnige uitgedijde intrestrekening niet meer noemde! Ons dunkt, dat wat er overbleef, voldoende is en in elk geval de moeite van het behandelen waard. Veel en veel meer dan rariteiten van limieten, die met een foefje gemaakt kunnen worden zonder enig begrip of ineengestrengelde logarithmen.

DEEL III.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S.; een splitsing in drie deeltjes, voor elke keer één, is wel zo wat mogelijk, maar is o.i. onnodig. Bovendien: de Nieuwe Schoolalgebra is steeds geweest een boek van drie delen met de volledige stof voor de H.B.S.; deel IV en het uittreksel IVβ waren voor de β-afdeling van het Gymnasium. Schrijvers en uitgever besloten daarom het werk, zoals het opgang gemaakt heeft, in dezelfde vorm te behouden.

Deel III heeft vooral de invloed van het Koninklijk besluit ondergaan en wel met name door toevoegingen van het hoofdstuk

over irrationale getallen en van de eerste beginselen van de analyse. Voor we daarover een en ander zeggen, vermelden we, dat de irrationale vergelijkingen van deel II naar III zijn overgebracht; daar behoren ze ook inderdaad thuis.

Irrationale vergelijkingen. Wat de behandeling betreft, kan men twee standpunten innemen: 1) „kwadrateer maar; een, twee of meer keer en kijk dan op het eind of je geen, een of twee wortels hebt". Wie deze manier voorstaat, doet beter de irrationale vergelijkingen weg te laten; zo'n behandeling heeft immers met wiskunde weinig uit te staan; ze komen verder zelden voor, dus dan maar opruimen.

2) „Bezint, voor gij begint". Dat hadden we natuurlijk ook reeds gedaan in de vorige drukken; toch bevredigde ons de behandeling niet. De irrationale vergelijkingen worden niet behandeld om de techniek, niet om het veelvuldig voorkomen; als men ze wil behouden, wat ons wel goed voorkomt, dan moet het gerechtvaardigd zijn wegens de wiskundige behandeling. We menen, dat theorie en voorbeelden van § 42 de toets der critiek kunnen doorstaan.

Het irrationale getal. Het hoofdstuk over de irrationale getallen wordt ingeleid door voorafgaande uitbreidingen van het getalbegrip; we verwijzen naar de overzichten op blz. 65, blz. 73 en blz. 83. Dit hoofdstukje is heel eenvoudig gehouden en uitsluitend bestemd voor mondelinge behandeling; ook zonder opgaven. Wie zich in deze materie wil inwerken, zij gewezen op de uitbreidingen van het getalbegrip in Wijdenes *Lagere Algebra I*, 3e druk blz. 17—25 (invoering van de negatieve gehele getallen), blz. 113—115 (van de breuken), blz. 140—149 en blz. 198—200, van de irrationale getallen) en blz. 228—232 (van de complexen). Een meer volledige beschouwing over de irrationale getallen vindt men in de 2de druk van Wijdenes *Middel-Algebra* blz. 135—160. Diepgaande, omvangrijke studie bevat het boek van Prof. Dr. F. Schuh: *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal* [1]). Hierin vindt men vier theoriën over het onmeetbare getal nl. van Cantor (blz. 37—74), van Dedekind (blz. 75—105), van onzen landgenoot Baudet (1891—1921) (blz. 106—121) en van Weierstrass blz. 122—147).

---

[1]) Deel 13 van *Noordhoff's Wiskundige werken;* 268 blz., geb. prijs *f* 4,65.

3ewijzen oor volle- ge induc- tie.

Nieuw is het hoofdstukje (blz. 12—15) over bewijzen door volledige inductie; deze methode van bewijs wordt zo dikwijls toegepast en moest zoveel meer uitdrukkelijk worden genoemd dat ze o.i. een plaatsje verdiende in een modern algebraboek.

e gebroken functiës.

Wij hadden en hebben nog:

1. $y = \dfrac{ax + b}{px + q}$; **2.** $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$; **3.** $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

Het Koninklijk besluit noemt **2** niet; nu kan men wel zeggen, dat **2** in **3** besloten is door $p = 0$ te nemen, maar daarmee is men er niet. Gold dit argument, dan hoefde men ook **1** niet te noemen. Er is wat anders, dat **2** van **3** onderscheidt: **3** heeft één asymptoot evenwijdig aan de X-as en 2, 1 of geen evenwijdig aan de Y-as; **2** heeft daarentegen een schuine asymptoot (en nog een evenwijdig aan de Y-as). Er is dus veel verschil, heel veel; **1** en vooral **2** zijn figuren, die de leerlingen elders ook krijgen (zie blz. 25 en 26); ook in de Vlakke Meetkunde en op het eind van de Stereometrie. **1** is een orthogonale hyperbool, **2** een hyperbool. Maar **3** is een kromme van de derde graad, feitelijk zonder aanwijsbaar nut voor de wiskundige ontwikkeling. De behandeling van de verschillende gevallen is een heel werk, ver uitgaande boven het vermogen van den gemiddelden leerling. Heel sterk zijn we gekant tegen een behandeling met differentiaalrekening.

De functie onder **3** genoemd is in vorige drukken behandeld, omdat deze voorkwam op het Staatsexamen, later dus op de eindexamens Gymnasium. Door kleine letter hebben we aangewezen, dat het geen verplichte leerstof was voor de H.B.S. Nu wel, maar we menen toch, dat de school genoeg te doen zal hebben met **1.** $y = \dfrac{ax + b}{px + q}$ en **2.** $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$. We hebben dit bedoeld, toen we den zetter order gaven alles over **1** en **2** met gewone letter te zetten, maar alles over **3** klein te houden.

De zesde ıerhaling.

Met de zesde herhaling van blz. 116—137 is de gewone stof afgehandeld. Collega's zie a.u.b. die herhaling eens rustig door; is dat bereikbaar of niet? Allemaal kleine vraagstukjes van de kracht van het eindexamen. Sleurtypen zijn het niet; dat was reeds zo; dat is inhaerent aan de Nieuwe Schoolalgebra. Dat het onderwijs gebaseerd op het nieuwe leerplan de weg volgt, die ons boek aanwees, is ons een grote genoegdoening.

De nieuwe leerstof. Nu komen we aan de differentiaal- en integraalrekening; de hele omvang is niet meer dan 46 blz. met inbegrip van de vraagstukken. Dit is nodig om te voldoen aan de eisen van het Koninklijk besluit, ook voldoende; de theorie is eenvoudig en beknopt, de opgaven zijn zeer eenvoudig. Dit is leerstof, die in hoge mate bijdraagt tot de ontwikkeling van het wiskundig begrijpen en die bovendien de deur opent voor verdere studie. Men denke toch vooral niet, dat de analyse er alleen is voor de studie in wis- en natuurkundige vakken, beide in de meest uitgebreide zin, nl. met de technische vakken, die er op steunen. Ook de economie en heel wat andere vakken, waarvan de meesten dit niet zouden vermoeden, eisen bij wetenschappelijke beoefening de analyse.

In elk geval is het nut van deze leerstof veel, veel hoger dan van een eindeloze mechaniek met wortelvormen en oneigenlijke machten; vandaar onze sterke beperking daarvan; ook veel belangrijker dan de logarithmenpuzzles, ook ingekrompen; dan de rekenkundige reeksen, eveneens bekort; het belang van een behandeling van $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ voor wiskundige scholing is uiterst gering, bovendien lastig en tijdrovend.

Zoals men heeft kunnen lezen, gelden onze opmerkingen over het leerplan 1937 slechts drie ondergeschikte punten; (aanmerkingen hebben we helemaal niet) en wel:

1) Liever niets in de tweede klas over rekenkundige reeksen.

2) Vrijheid om een tafel in 4 of in 5 decimalen te gebruiken. Deze is reeds verleend bij monde van de inspecteurs Van Andel en De Bruyn op de vergadering van 23 Oct. 1937.

3) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ te vervangen door $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$.

Dit is alles; wij hebben in de Nieuwe Schoolalgebra onze wensen kenbaar gemaakt door de rekenkundige reeksen in klasse 2 af te doen in een halve bladzijde; door naast de 4 decimalen de 5 te behouden en door alles over de functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ klein te drukken.

P. WIJDENES.
H. J. E. BETH.

Men wordt verzocht kennis te nemen van onze inzichten op blz. 5—10 van dit prospectus.

DE NIEUWE SCHOOLALGEBRA EN HET PROGRAM VAN DE GYMNASIA EN LYCEA.

Nauwkeurige studie van de programma's van vele Gymnasia en Lycea heeft opgeleverd, dat aan die scholen in de klassen I—IV de inhoud wordt onderwezen van de delen I en II van de Nieuwe Schoolalgebra. Met deze beperking evenwel: $y = ax^2 + bx + c$ en $ax^2 + bx + c = 0$ met alles wat er om en aan hangt (deel II § 39—53) worden wel behandeld, maar niet zo, of er blijft nog wel een en ander te doen, hetzij in omvang, hetzij in diepte of in beide. De stof van de genoemde paragrafen is nodig, al zal men bij eerste kennismaking allicht een derde deel ter zijde laten.

Alle programma's noemen de oneigenlijke machten en de logarithmen; zodat alleen de reeksen uit deel II niet aangeroerd worden.

Voor de klassen Vα en VIα ziet men genoemd: vierkantsvergelijkingen meer uitgebreid; zie boven. En verder vergelijkingen, die er toe herleid worden (enkele programma's noemen die ook) nl. irrationale vergelijkingen, wederkerige vergelijkingen en andere. Genoemd worden dan ook de imaginairen en andere onderwerpen (gebroken functies, reststelling) uit de inhoud van IIIα, die men hieronder ziet.

NIEUWE SCHOOLALGEBRA IIIα

82 bladzijden 29 figuren . . . . *f* 1.—

INHOUD.

Nauwkeurig hebben we de Mondelinge examens Staatsexamens A door Dr. Schamhardt[1]) nagegaan. Uiteraard lopen die parallel met de α-opleiding van het Gymnasium en Lyceum; **ook voor de α's Staatsexamen heeft men genoeg aan**

NIEUWE SCHOOLALGEBRA I, II en IIIα

Het enige, dat deze boeken teveel hebben voor α, zijn de reeksen (II § 71—76), waarbij we echter opmerken, dat er scholen zijn, waar men er wat aan doet; de enkele bladzijden over limieten zijn de behandeling waard; onder de mondelinge staats-examens-vragen treffen we er ook een paar aan (waarschijnlijk echter, omdat de candidaat kennis er van verraadde; in zo'n geval ziet men ook bij andere examens wel eens vragen, die buiten het raam vallen).

Waar de splitsing in α en β bij de 5e klas begint, is het alleszins gerechtvaardigd (al hebben dan de α's 20 blz. niet **nodig**) **voor alle klassen I—IV van de Gymnasia en Lycea te volgen**

NIEUWE SCHOOLALGEBRA I en II

en voor de klassen Vα en VIα het kleine boekje IIIα.

De leerlingen van de H.B.S. en de β's van Gymnasia en Lycea hebben de reeksen wel nodig, zodat het niet mogelijk is het anders te schikken, dan dat de α's enige paragrafen van deel II overslaan; economisch is een deel II zonder de reeksen naast het bestaande niet verantwoord.

Voor de β's van Gymnasia en Lycea kunnen we kort zijn; die hebben na deel II **deel III nodig; geheel; maar voldoende is dat ook.**

Men zal goed doen zich, wat de „analyse" betreft, dezelfde beperking op te leggen, als wij, toen we blz. 153—195 van deel III schreven.

---

[1]) Dr. H. C. Schamhardt Mondelinge Staatsexamen A 1938, 20 blz. 100 vragen over Meetkunde, 125 over Algebra.

Aan het slot dus:

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, echter zonder de reeksen

Vα en VIα Nieuwe Schoolalgebra IIIα

Vβ en VIβ Nieuwe Schoolalgebra III

Staatsexamen

Voor α De delen I, II, IIIα

Voor β De delen I, II, III.

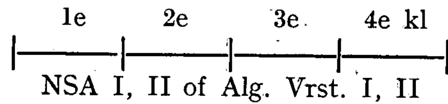
P. WIJDENES.
Dr. H. J. E. BETH.

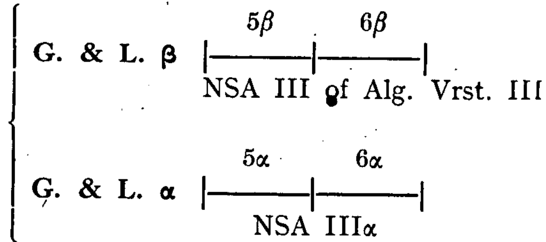
☞ Geeft men de voorkeur aan een boek met vraagstukken met zeer beknopte theorie, dan leze men in het bovenstaande inplaats van Nieuwe Schoolalgebra

P. WIJDENES, Algebraische Vraagstukken.

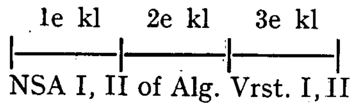
Alleen voor Gymnasium Vα en VIα blijft dan Nieuwe Schoolalgebra IIIα.

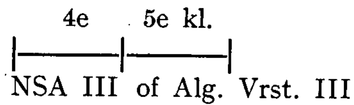
Gymnasium en Lyceum

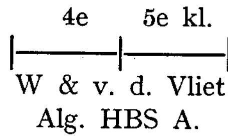




HBS







VLAKKE MEETKUNDE.

Schoolboeken.

Dr. B. P. Haalmeyer, Leerboek der Vlakke Meetkunde, Deel I, **3e druk**, *f* 2.10, geb. *f* 2.50, Deel II, **3e druk** *f* 2.10, gebonden. . . . . - 2.50

Dr. P. Molenbroek en **P. Wijdenes**, Planimetrie voor Middelb. en Voorber. Hoger Onderwijs, Deel I, **2e druk**, Deel II, **2e druk**, gec. à . . . . - 1.90

J. Versluys, Beknopt leerboek der vlakke meetkunde, **8e dr.**, herzien door **P. Wijdenes** . . . . - 1.25

P. Wijdenes, Meetkundige vraagstukken met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het M.O. en V.H.O., I met gradenboog en twee driehoeken *f* 1.40, II . . . . - 2.40

P. Wijdenes, Planimetrie, met twee driehoeken, gradenboog en overzicht. Uitgave in één deel, **2e druk** geb. . . . . . - 3.20
Uitgave in twee deeltjes gec. à. . . . . - 1.60

P. Wijdenes en L. P. Ritchi, Vlakke Meetkunde voor Indische Scholen I, **5e druk**, II **3e druk** gec. elk . . . . - 1.60

P. Wijdenes, De Kegelsneden voor het M.O. met modellen . - 0.80

P. Wijdenes en **Dr. D. de Lange**, Vlakke Meetkunde I, met gradenboog en overzicht. **11e druk**, *f* 1.75, geb. . . . . . - 2.—
II, met overzicht. **10e druk**. . . . . - 2.25

P. Wijdenes, Beknopte Meetkunde, **9e druk** *f* 1,70, II, **7e druk** . . . . - 1.70
Opl. Beknopte Meetkunde I, II, **2e druk**. . . . . - 1.—

P. Wijdenes, Meetkunde voor M.O. en M.U.L.O. I met gradenboog en driehoek. **14e druk** . . . . - 1.40
deel II, **8e druk** . . . . - 1.50
Werkschrift bij I, **7e druk**, *f* 0.70, gecart. . . . . - 0.90
Werkschrift bij II, **3e druk**, *f* 0.60, gecart. . . . . - 0.85

Oplossingen van de Vraagstukken uit de Meetkunde voor M.O. en M.U.L.O. **3e druk** . . . . - 0.90

P. Wijdenes en **H. J. van der Ploeg**, Meetkunde voor het Nijverheidsonderwijs. **2e druk**, geb. . . . . - 1.95

W. H. Wisselink, Vraagstukken ter oefening in de Meetkunde I. **22e druk** *f* 0.50. II. **16e druk** . . . . - 0.75

W. H. Wisselink, Kern der Meetkunde, **16e druk** . . . . - 0.90

L. van Zanten en **G. A. Scholten**, Leerboek der Meetkunde, ten gebruike bij het Onderwijs voor Ambachtslieden, **14e druk** - 1.20

☛ In al deze schoolboeken (ook in het grote handboek van Molenbroek, 8e druk) gaat de behandeling van de oppervlakten vooraf aan de veel moeilijker hoofdstukken over vermenigvuldiging, gelijkvormige driehoeken en berekeningen.

De talrijke herdrukken bewijzen, dat vele leraren mede de wenselijkheid aanvoelen van een didaktische volgorde.